牛栏山一中2024-2025学年度高二第一学期10月考试

数学试卷　　　　2024.10

第一部分（选择题，共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.直线$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$的倾斜角为

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{3}$　　C.$\frac{5\pi}{6}$　　D.$\frac{2\pi}{3}$

2.设$a=(x,1,2)$，$\vec{b}=(1,2,z)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则xz等于

A.-2　　B.2　　C.　　D.4

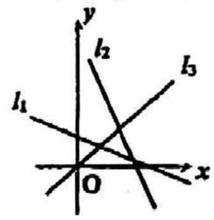
3.已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为60°，m,n为异面直线，且$m\perp\alpha,n\perp\beta$，则m,n所成的角为

A.30°　　B.60°　　C.90°　　D.120°

4.直线l的方向向量$\overline{n_1}=(-\frac{1}{2},1,0)$，平面$\alpha$的法向量$\overline{n_2}=(2,-1,3)$，则直线$l$与平面$\alpha$的位置关系为

A.平行　　B.在平面内　　C.相交不垂直　　D.垂直

5.如图，在平面直角坐标系中有三条直线l_1，l_2，l_3，其对应的斜率分别为k_1，k_2，k_3，则下面选项中正确的是



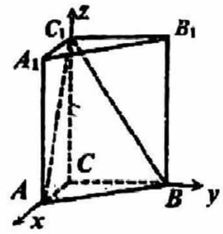
A.$k_1<k_2<k_3$　　B.$k_3<k_2<k_1$

C.$k_2<k_1<k_3$　　D.$k_1<k_3<k_2$

6.已知$\vec{a}=(2,-1,3)$，$\vec{b}=(-1,4,-2)$，$\vec{c}=(1,-2,\lambda)$，若a、$\vec{b}$、$\vec{c}$三向量共面，则实数λ等于

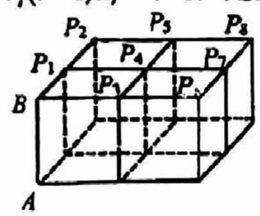
A.$\frac{13}{7}$　　B.$\frac{12}{7}$　　C.$-\frac{11}{7}$　　D.$-\frac{10}{7}$

7.如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC=2$，$AC=1$，$CC_1=3$，$AC\perp BC$，则平面ABC_1的一个法向量为



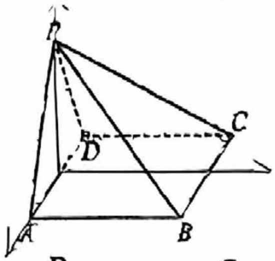
A.$(-6,-3,2)$　　B.$(6,3,-2)$　　C.$(6,3,2)$　　D.$(6,-3,2)$

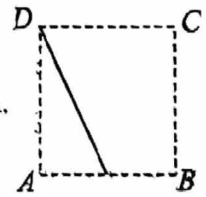
8.如图，四个棱长为1的正方体排成一个正四棱柱，AB是一条侧棱，$P_i(i=1,2,\cdots,8)$是上底面上其余的八个点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}(i=1,2,\cdots,8)$的不同值的个数为

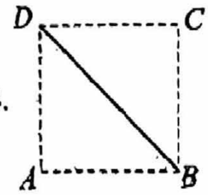


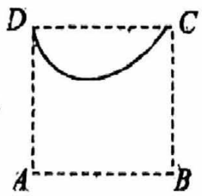
A.1　　B.2　　C.3　　D.4

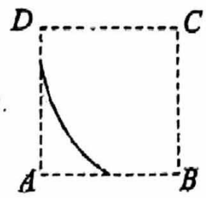
9.如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，侧面 PAD 为正三角形，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且满足 $MP=MC$．则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

10.定义平面直角坐标系 xOy 中内任意两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 距离 $d_{PQ}=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$，称之为这两点间的曼哈顿距离(简称为曼距).例如，在平面直角坐标系中，点 $P(-3,-2)$ 与点 $Q(2,2)$ 之间的曼距 $d_{PQ}=|-3-2|+|-2-2|=5+4=9$，若点 A 在直线 $y=\dfrac{1}{2}x-2$ 上，点 B 为抛物线 $y=x^2+2x$ 上一点，则曼距 d_{AB} 的最小值

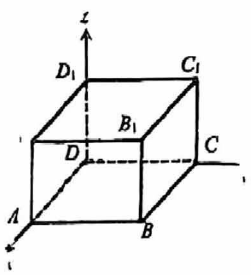
A. $\dfrac{23\sqrt{5}}{4}$　　B. $\dfrac{69}{40}$　　C. $\dfrac{23}{16}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

第二部分（非选择题，共 110 分）

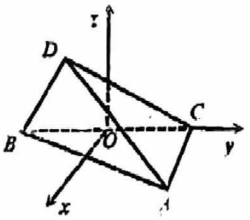
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填写在答题卡上.

11.过点 $(1,0)$ 且与直线 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ 平行的直线方程是________.

12.如图所示，以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 D 为坐标原点，过 D 的三条棱所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系，若 $\overrightarrow{DB_1}=(3,2,1)$，则 $\overrightarrow{A_1C}=$________



（12 题图）



（13 题图）

13.如图，$BC=4$，原点 O 是 BC 的中点，点 D 在平面 yOz 上，且 $\angle BDC=90^0$，$\angle DCB=30^0$，则 $\overrightarrow{DC}$ 的坐标为________.

14.集合 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x+1}=a\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|y=(2-a)(x+2)\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值

集合为______

15.在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则在下列命题中正确的有________.（填上所有正确命题的序号）

①当 $\lambda=1$ 时，ΔAA_1P 的面积为定值；②当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值；

③当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，至少存在一点 P，使得 $A_1P\perp BP$；

④当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本题满分 13 分）

已知直线 $l: y-1=k(x-1)$（k 为参数）.

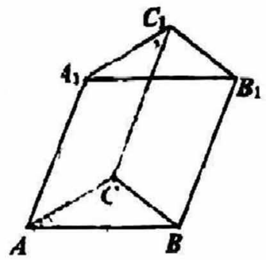
（I）在直角坐标系 xOy 中，分别画 $k=0,\frac{1}{2},1$ 时的直线；

（II）求直线 l 不经过第四象限时的斜率（直接写出结果）；

（III）若 $k<0$，直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积为 2，求此时 k 的值

17.（本题满分 13 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长都相等，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，点 D，E 分别为棱 A_1C_1，AB 的中点，求：



（I）$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}$；

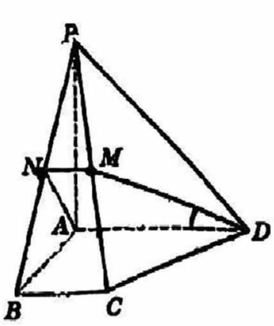
（II）若 $AB=1$，求 DE 的长.

18.（本题满分 14 分）

若三角形的一个顶点为 $A(2,4)$，其中边 AB、边 AC 上的高所在的直线方程分别为 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 和 $y=x-2$，试求此三角形三边所在的直线方程.

19.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面为直角梯形 $AD//BC$，M 为棱 PC 的中点，平面 ADM 与棱 PB 交于点 N.



（I）求证：N 为棱 PB 中点；

（II）若 $\angle BAD=90^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=AD=AB=2BC=4$，求 CD 与平面 ADM 所成角的正弦值.

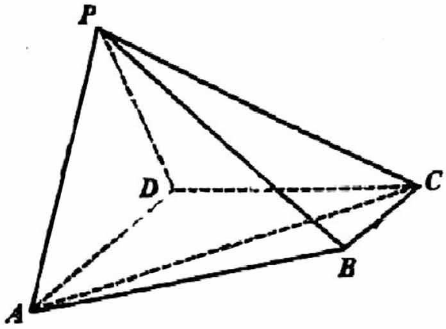
20.（本小题满分 15 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ADC=90^{\circ}$，$AD//BC$，$AD=CD=2BC=2$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$.

（Ⅰ）求证：$CD\perp PA$；

（Ⅱ）求二面角 $C-PA-D$ 的余弦值；

（Ⅲ）若 E 为 AC 的中点，在棱 PC 上是否存在点 M，使得 $EM\perp$ 平面PCD？若存在，求出 $\dfrac{PM}{PC}$ 的值？若不存在，说明理由.



21.（本小题满分 15 分）

对于正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\in N^*,n\geq 3)$，如果任意去掉其中一个元素 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合 A 为"可分集合".

（Ⅰ）判断集合 $\{2,4,6,8,10\}$ 和 $\{1,3,5,7,9,11,13\}$ 是否是"可分集合"（不必写过程）；

（Ⅱ）求证：四个元素的集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 一定不是"可分集合"；

（Ⅲ）若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\in N^*,n\geq 3)$ 是"可分集合"，证明：n 为奇数.

牛栏山一中 2024-2025 学年度高二 10 月考试数学

参 考 答 案　　　　2024.10

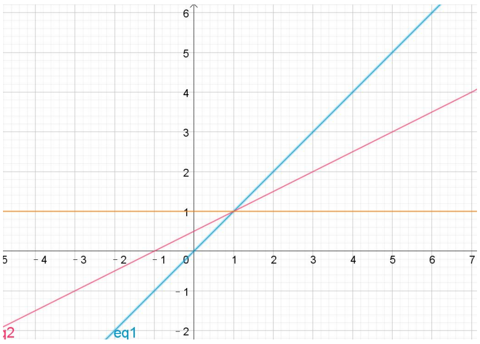
一、选择题.

1-5CBBCC　　6-10BCAAC（）

11.$\underline{x-2y-1=0}$　；　12.$\underline{(-3,2,-1)}$　；　13.$\underline{(0,3,-\sqrt{3})}$

14.$\underline{\{1,-1\}}$　　；　　15.①②③④（答对一个 2 分，两个 3 分，三个 4 分，四个 5 分）

16.（I）在直角坐标系 xOy 中，分别画 $k=0,\frac{1}{2},1$ 时的直线；



…………………6 分

（II）$[0,1]$；（少一个端点扣一分）……………………………………………9 分

（III）直线 $l: y-1=k(x-1)$.

令 $x=0$，得 $y=1-k$;……………………………………………10 分

令 $y=0$，得 $x=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$ ……………………………………………11 分

则 $S=\frac{1}{2}|1-k|\left|\frac{k-1}{k}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(k-1)^2}{k}\right|$，……………………………………………12 分

因为 $k<0$，故 $S=\frac{1}{2}\left|\frac{(k-1)^2}{k}\right|=-\frac{1}{2}\frac{(k-1)^2}{k}=2$.

解得 $k=-1$……………………………………………13 分

17.（本题满分 13 分）

（I）解：$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA_1}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$……………………………………………1 分

$=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}$ ……………………………………………2 分

$=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos60^\circ-\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos60^\circ$……………………………4 分

因为 $\left|\overrightarrow{AA_1}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$，

所以 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$……………………………………………5 分

（II）设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，这三个向量不共面，$\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\right\}$可构成空间的一个基底.

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$，…………………7 分

$\overrightarrow{DE}^2=\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)^2=\dfrac{1}{4}\vec{a}^2+\dfrac{1}{4}\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\left(-\dfrac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$，…………………9 分

$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，…………………11 分

$\overrightarrow{DE}^2=\left|\overrightarrow{DE}\right|^2=\dfrac{5}{4}$，…………………12 分

$\left|DE\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$…………………13 分

18.（本题满分 14 分）

解：AB 边上的高线为 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$，AC 边上的高线为 $y=x-2$，

那么 AB 与 AC 所在直线的斜率分别为 2 与－1，……………………………4 分

因此 AB 与 AC 所在直线的方程分别是

$y-4=2(x-2)$与 $y-4=-(x-2)$，…………………………………………8 分

即 $2x-y=0$ 与 $x+y-6=0$

由$\begin{cases}x-y-2=0\\2x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases}$，即 B 点的坐标为(-2,-4)；……………………9 分

又由$\begin{cases}x+y-6=0\\x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=0\end{cases}$，即 C 点的坐标为(6,0)，……………………10 分

$k_{BC}=\dfrac{-4-0}{-2-6}=\dfrac{1}{2}$，……………………12 分

设由此得 BC 所在的直线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-6)$，即 $x-2y-6=0$，

故三角形三边 AB、AC、BC 所在的直线方程分别为

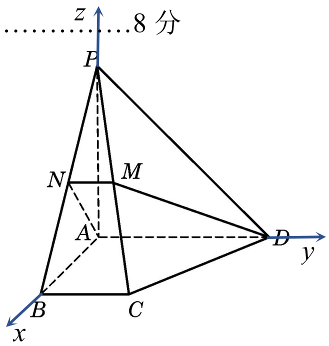
$2x-y=0$ 与 $x+y-6=0$，$x-2y-6=0$. ………14 分

19.（本小题满分 15 分）

（I）证明：
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AD//BC\\BC\not\subset\text{平面}ADM\\AD\subset\text{平面}ADM\end{array}\right\}\Rightarrow BC//\text{平面}ADM\\MN\subset\text{平面}PBC\\\text{平面}PBC\cap\text{平面}ADM=MN\end{array}\right\}\Rightarrow BC//MN$$

因为 M 为棱 PC 的中点，所以 N 为棱 PB 中点；……………………………………6 分

（II）因为$\angle BAD=90^{\circ}$，$PA\perp$平面$ABCD$，所以以 A 为原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系。……………………………………8 分



$C(4,2,0),D(0,4,0),N(2,2,0),\overrightarrow{DC}=(4,-2,0),\overrightarrow{AN}=(2,2,0),\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$，

设平面ADM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+2y=0\\ 4y=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(1,0,-1)$，

……………………………………12 分

设CD与平面ADM所成角为θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DC},\vec{n}\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DC}||\vec{n}|}\right|=\frac{(4,-2,0)\cdot(1,0,-1)}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$ ……………………………………15 分

20.解：（Ⅰ）在四棱锥$P-ABCD$中，

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，

又因为$CD\perp AD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

所以$CD\perp$平面PAD

因为$PA\subset$平面PAD，

所以$CD\perp PA$．　……………………………………4 分

（Ⅱ）取AD中点O，连接OP,OB．

因为$PA=PD$，

所以$PO\perp AD$．

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$PO\subset$平面PAD，

所以$PO\perp$平面$ABCD$．

因为$CD\perp AD,BC//AD,AD=2BC$，

所以$BC//OD,BC=OD$．

所以四边形$OBCD$是平行四边形.

所以$OB\perp AD$．

以 O 为原点，分别以 OA，OB，OP 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系………6 分

则$O(0,0,0),A(1,0,0),B(0,2,0),C(-1,2,0),D(-1,0,0),P(0,0,1)$.

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$……………………………………7 分

设平面 PAC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -x+z=0.\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=1,z=1$.

所以 $\vec{n}=(1,1,1)$.

因为平面 PAD 的法向量 $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$，……………………………………9 分

所以 $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OB}\right\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

由图可知，二面角 $C-PA-D$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-PA-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ………………………………………11 分

（III）向量法：假设在棱 PC 上存在点 M，使得 $EM\perp$ 平面PCD

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$， $\lambda\in[0,1]$………………………………………12 分

则 $\overrightarrow{PM}=\lambda(-1,2,-1)=(-\lambda,2\lambda,-\lambda)$.

因为 $E(0,1,0)$，所以 $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PM}=(0,-1,1)+(-\lambda,2\lambda,-\lambda)$

所以 $\overrightarrow{EM}=(-\lambda,2\lambda-1,1-\lambda)$ ………………………………………13 分

所以 $\overrightarrow{EM}\bullet\overrightarrow{DC}=0$， $\overrightarrow{EM}\bullet\overrightarrow{DP}=0$………………………………………14 分

所以 $\begin{cases}2(2\lambda-1)=0,\\ -\lambda+1-\lambda=0.\end{cases}\therefore\lambda=\dfrac{1}{2}.$

所以当 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{1}{2}$ 时，$EM\perp$ 平面 PCD. ……………15 分

（III）综合法：取 PC 的中点 M，则 EM 为 ΔPAC 的中位线，易证 $AP\perp$ 平面 PCD.

所以 $EM\perp$ 平面 PCD.

所以当 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{1}{2}$ 时，$EM\perp$ 平面 PCD. ……………15 分

21.（本小题满分 15 分）

对于正整数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\in N^*,n\geq 3)$，如果任意去掉其中一个元素 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合 A 为“可分集合”.

（I）分别判断集合 $\{2,4,6,8,10\}$ 和 $\{1,3,5,7,9,11,13\}$ 是否是“可分集合”（不必写过程）；

（II）求证：四个元素的集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 一定不是“可分集合”；

（III）若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\in N^*,n\geq 3)$ 是“可分集合”，证明：n 为奇数.

21.解：（I）集合 $\{2,4,6,8,10\}$ 不是“可分集合”，

集合 $\{1,3,5,7,9,11,13\}$ 是“可分集合”. …………………4 分

（II）假设 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 是“可分集合”

不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4$，将集合 $\{a_2,a_3,a_4\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，则有 $a_2+a_3=a_4$；

将集合 $\{a_1,a_3,a_4\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，则有 $a_1+a_3=a_4$.

所以 $a_1=a_2$，产生矛盾

因此当 n=4 时，集合 A 一定不是“可分集合”. ……………………………9 分

（III）设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 所有元素之和为 M.

由题可知，$M-a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，因此 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的奇偶性相同.

如果 M 为奇数，则 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）也均为奇数，由于 $M=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以 n 为奇数.

如果 M 为偶数，则 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，此时设 $a_i=2b_i$，则 $\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 也是“可分集合”. 重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“可分集合”. 此时各项之和也为奇数，集合 A 中元素个数为奇数. 综上所述，集合 A 中元素个数为奇数. ……………………………15 分