2024北京十一学校高二10月月考

数　学

本试卷共4页，满分150分.考试时长120分钟.

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，那么集合 $A\cap B$ 等于（　）

A. $\{2\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 某校为了解学生关于校本课程的选课意向，计划从高一、高二这两个年级共500名学生中，采用分层抽样的方法抽取50人进行调查．已知高一年级共有300名学生，那么应抽取高一年级学生的人数为（　）

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

3. 不等式 $x(x-1)<0$ 的解集为（　）

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|-1<x<0\}$

C. $\{x|\ x<0$ 或 $x>1\}$　　D. $\{x|\ x<-1$ 或 $x>0\}$

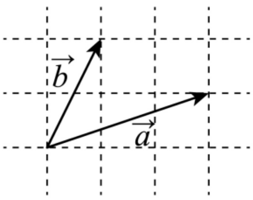
4. 在△ABC 中，$a=4$，$A=45°$，$B=60°$，则 $b=$（　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{2}$

5. $\sin15°\cos15°=$（　）

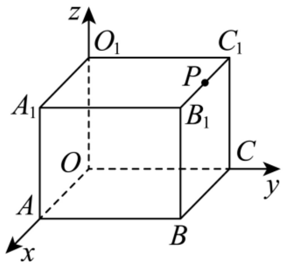
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若网格中每个小正方形的边长为1，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$（　）



A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

7. 如图，在长方体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中，$OA=4$，$OC=6$，$OO_1=2$，点 P 是 B_1C_1 的中点，则点 P 的坐标为（　）

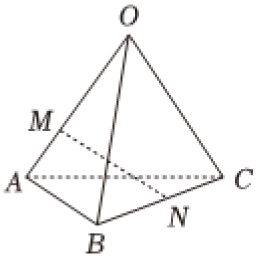


A. $(2,6,2)$　　B. $(3,4,2)$　　C. $(4,6,2)$　　D. $(6,2,1)$

8. 已知$\vec{a}=(1,2,0),\vec{b}=(-2,0,1)$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\theta$，则（　）

A. $\vec{a}\perp\vec{b}$　　B. $\vec{a}//\vec{b}$　　C. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　D. $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

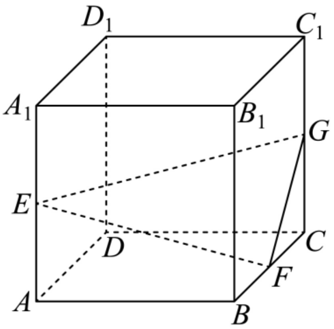
9. 如图，空间四边形$OABC$中，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，点$M$在$OA$上，且$\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，点$N$为$BC$中点，则$\overrightarrow{MN}$等于（　）



A. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

C. $\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$　　D. $-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$

10. 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F，G分别为棱AA_1，BC，CC_1的中点，动点H在平面EFG内，且$DH=1$.则下列说法正确的是（　）



A. 存在点H，使得直线DH与直线FG相交

B. 存在点H，使得直线$DH\perp$平面EFG

C. 直线B_1H与平面EFG所成角的大小为$\dfrac{\pi}{3}$

D. 平面EFG被正方体所截得的截面面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

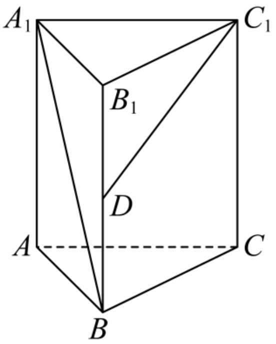
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11. 已知向量 $\vec{a}=(1,m,3)$，$\vec{b}=(2,4,6)$.若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则实数 $m=$______.

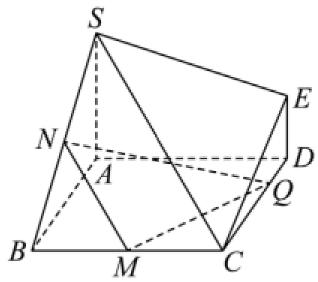
12. $\sin 13^\circ\cos 32^\circ+\cos 13^\circ\sin 32^\circ=$______.

13. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=45^\circ, AB=2\sqrt{2}, AC=3$，那么 BC 等于______.

14. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=2$，D 为 B_1B 的中点，则异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值为__________.



15. 如图，在多面体 $ABCDES$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $DE\,//\,SA$，$SA=AB=2DE=2$，M，N 分别是线段 BC，SB 的中点，Q 是线段 DC 上的一个动点（含端点 D，C），则下列说法正确的是______



（1）存在点 Q，使得 $NQ\perp SB$；

（2）存在点 Q，使得异面直线 NQ 与 SA 所成的角为 60°；

（3）三棱锥 $Q-AMN$ 体积的最大值是 $\dfrac{2}{3}$；

（4）当点 Q 自 D 向 C 处运动时，直线 DC 与平面 QMN 所成的角逐渐增大.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 85 分.应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f(0)=1$.

（1）求 A；

（2）函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（3）求函数 $f(x)$ 的最小值及相应的 x 的值.

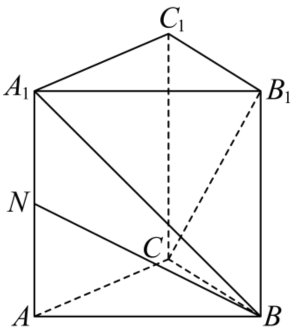
17. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a=2$，$c=3$，$\cos B=\dfrac{1}{4}$.

（1）求b的值；

（2）求$\sin C$的值；

（3）求$\triangle ABC$的面积.

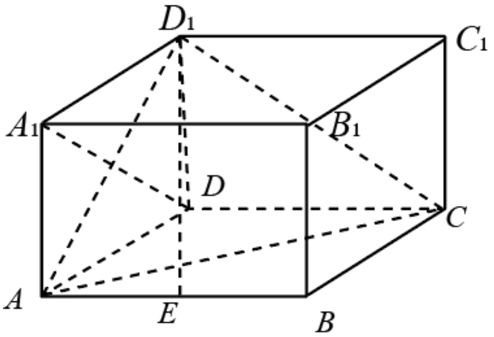
18. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90°$，$AA_1=2$，N为A_1A的中点.



（1）求$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{B_1C}$；

（2）求直线A_1B与B_1C所成角的余弦值.

19. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，E为AB的中点.

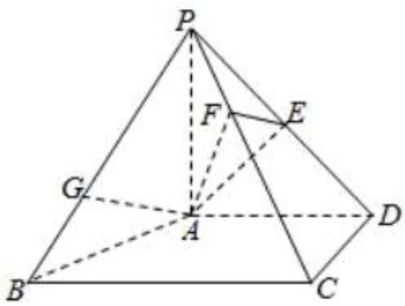


（1）证明：$D_1E\perp A_1D$；

（2）求点E到平面ACD_1的距离；

（3）求平面AD_1E与平面ACD_1夹角的余弦值.

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD//BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$. E为PD的中点，点F在PC上，且$\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.



（1）求证：$CD\perp$平面PAD；

（2）求直线PC与面AEF所成角的正弦值；

（3）在线段PB上是否存在点G，使得A、E、F、G四点共面，如果存在求出$\frac{PG}{PB}$的值；如果不存在说明理由.

21. 已知Ω是棱长为$\sqrt{2}$的正四面体$ABCD$，设Ω的四个顶点到平面α的距离所构成的集合为M，若M中元素的个数为k，则称α为Ω的k阶等距平面，M为Ω的k阶等距集.

（1）若α为Ω的1阶等距平面且1阶等距集为$\{a\}$，求a的所有可能值以及相应的α的个数；

（2）已知β为Ω的4阶等距平面，且点A与点B,C,D分别位于β的两侧.若Ω的4阶等距集为$\{b,2b,3b,4b\}$，其中点A到β的距离为b，求平面BCD与β夹角的余弦值.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】由交集定义可直接求得结果.

【详解】由交集定义知：$A\cap B=\{2\}$.

故选：A.

2.【答案】C

【分析】根据分层抽样的定义求出相应比例，进而得出结果.

【详解】解：因为高一年级共有300名学生，占高一、高二这两个年级共500名的$\frac{300}{500}=\frac{3}{5}$，

则采用分层抽样的方法抽取50人中，应抽取高一年级学生的人数为$50\times\frac{3}{5}=30$人.

故选：C.

3.【答案】A

【分析】根据一元二次方程的两个根，解得一元二次不等式的解集.

【详解】方程$x(x-1)=0$有两个根 0,1，

则不等式$x(x-1)<0$的解集为$\{x|0<x<1\}$

故选：A

4.【答案】C

【分析】利用正弦定理直接求解

【详解】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$

故选：C

5.【答案】A

【分析】由正弦函数的二倍角公式即可求解.

【详解】由题意得$\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$，故 A 正确.

故选：A.

6.【答案】B

【分析】运用坐标计算向量的模.

【详解】由图形可知：$\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,2),\therefore \vec{a}-\vec{b}=(2,-1),|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ ；

故选：B.

7.【答案】A

【分析】根据题意，结合空间直角坐标系的坐标的写法，结合中点公式，即可求解.

【详解】由题意，长方体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$ 中，$OA=4$，$OC=6$，$OO_1=2$，

可得 $B_1(4,6,2),C_1(0,6,2)$，

因为点 P 为 B_1C_1 的中点，由中点公式可得，点 P 的坐标为 $P(2,6,2)$.

故选：A.

8.【答案】C

【分析】由空间向量的数量积、模长、夹角公式可判断 ACD；设 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，代入解方程即可判断 B.

【详解】对于 A，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times0+0\times1=-2\neq0$，故 A 错误；

对于 B，设 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则 $\begin{cases}1=-2\lambda\\2=0\times\lambda\\0=\lambda\end{cases}$，则 λ 无解，故 B 错误；

对于 C，$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$，

所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，故 C 正确；

对于 D，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{5}\neq\dfrac{1}{2}$，故 D 错误.

故选：C.

9.【答案】B

【分析】利用空间向量的线性运算法则求解.

【详解】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

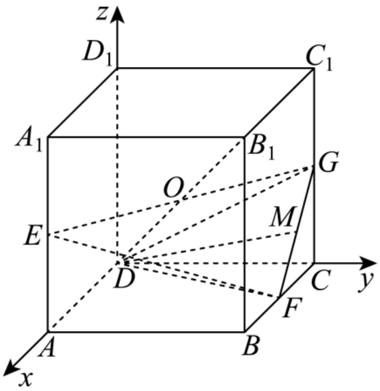
故选：B.

10.【答案】C

【分析】连接 DF，DG，取 FG 的中点 M，连接 DM，点 D 到线段 FG 的最短距离大于1，即可判断 A；建立空间直角坐标系，点 D 到平面 EFG 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$，即可判断 B；由 $DB_1\perp$ 平面 EFG，连接 DB_1 交 EG 于点 O，$\mathrm{Rt}\triangle OB_1H$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 全等，所以 $\angle B_1HO=\angle DHO=\dfrac{\pi}{3}$，即可判断

C；平面 EFG 被正方体所截得的截面图形为正六边形，且边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可求截面面积.

【详解】



连接 DF， DG，所以 $|DF|=|DG|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $|FG|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，取 FG 的中点 M，连接 DM，

所以 $|DM|=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}>1$，点 D 到线段 FG 的最短距离大于1，所以不存在点 H，使得直线 DH 与直线 FG 相交，故A不正确；

以 D 为坐标原点，分别以 DA， DC， DD_1 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系，则

$E\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$， $F\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$， $G\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$， $D(0,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},1,-\dfrac{1}{2}\right)$， $\overrightarrow{EG}=(-1,1,0)$， $\overrightarrow{DE}=\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EG}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}z=0\\ -x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1$， $z=1$，所以 $\vec{n}=(1,1,1)$，

所以点 D 到平面 EFG 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$，而 $DH=1$，所以不存在点 H，使得直线 $DH\perp$ 平面 EFG，故B不正确；

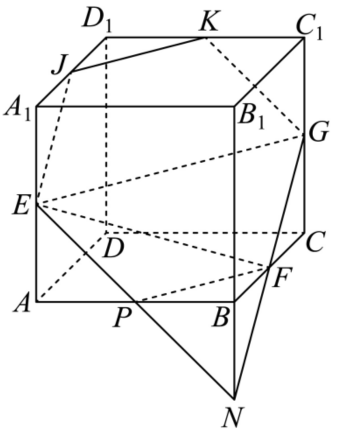
因为 $\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，所以 $DB_1\perp$ 平面 EFG，连接 DB_1 交 EG 于点 O，所以 O 为 DB_1 的中点，

$DO=B_1O=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle B_1HO$ 为直线 B_1H 与平面 EFG 所成角，

因为 $DH=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 中， $\sin\angle DHO=\dfrac{DO}{DH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle DHO=\dfrac{\pi}{3}$，因为 $\mathrm{Rt}\triangle OB_1H$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 全等，所以 $\angle B_1HO=\angle DHO=\dfrac{\pi}{3}$，故C正确；



延长 GF 交 B_1B 的延长线于 N，连接 EN 交 AB 于 P，连接 PF，取 D_1C_1 的中点 K，D_1A_1 的中点 J，

连接 KG，EJ，KJ，$KG//EP$，$EJ//GF$，$KJ//PF$，

平面 EFG 被正方体所截得的截面图形为正六边形，且边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以截面面积为 $6\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故 D 不正确.

故选：C .

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11.【答案】2

【分析】利用空间向量平行的坐标表示计算可得 $m=2$.

【详解】根据题意由 $\vec{a}//\vec{b}$ 可知存在实数 λ 使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，

可得 $\vec{b}=(2,4,6)=\lambda\vec{a}=(\lambda,m\lambda,3\lambda)$，

解得 $\lambda=2$，可得 $m=2$；

故答案为：2

12.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ## $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】利用两角和的正弦公式化简求值，即得答案.

【详解】$\sin13^\circ\cos32^\circ+\cos13^\circ\sin32^\circ=\sin(13^\circ+32^\circ)=\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

13.【答案】$\sqrt{5}$

【分析】直接由余弦定理计算即可.

【详解】由已知得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle A=8+9-2\times2\sqrt{2}\times3\times\cos45^\circ=5$，

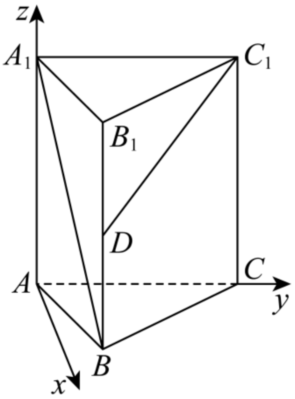
所以 $BC=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

14.【答案】$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

【分析】以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，求得向量 $\overrightarrow{A_1B}$ 和 $\overrightarrow{C_1D}$ 的坐标，结合向量的夹角公式，即可求解.

【详解】以 A 为坐标原点，在平面 ABC 内作垂直于 AC 的直线 Ax 为 x 轴，AC 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图所示：



则 $A_1(0,0,2)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，$C_1(0,1,2)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{C_1D}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right)$，

所以 $\left|\cos\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{C_1D}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1D}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\left|\overrightarrow{C_1D}\right|}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

则直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

15.【答案】$(1)(3)(4)$

【分析】以 A 为原点，建立空间直角坐标系，假设存在点 $Q(m,2,0)$，根据 $NQ\perp SB$，利用向量的数量积的运算公式，列出方程，求得 m 的值，可判定 A 正确；

结合向量的夹角公式，列出方程，可得判定 B 不正确；连接 AQ,AM,AN，设 $DQ=m$，求得 $S_{\triangle AMQ}=2-\dfrac{m}{2}$，棱锥的体积公式，可判定 C 正确；

求得平面 MNQ 的法向量 $\vec{m}=(1,2-m,3-m)$，利用向量的夹角公式和二次函数的性质，可判定 D 错误.

【详解】以 A 为原点，以 AB,AD,AS 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

如图（1）所示，可得 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),E(0,2,1),S(0,0,2)$，

$N(1,0,1),M(2,1,0)$，

对于（1）中，假设存在点 $Q(m,2,0)(0\le m\le 2)$，使得 $NQ\perp SB$，

则 $\overrightarrow{NQ}=(m-1,2,-1),\overrightarrow{SB}=(2,0,-2)$，

所以 $\overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{SB}=2(m-1)+2=0$，解得 $m=0$，

即点 Q 与 D 重合时，$NQ\perp SB$，所以 A 正确；

对于（2）中，假设存在点 $Q(m,2,0)(0\le m\le 2)$，

因为 $\overrightarrow{NQ}=(m-1,2,-1),\overrightarrow{SA}=(0,0,-2)$，

所以 $\left|\cos\overrightarrow{NQ},\overrightarrow{SA}\right|=\dfrac{\overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{SA}}{\left|\overrightarrow{NQ}\right|\left|\overrightarrow{SA}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{(m-1)^2+5}}=\dfrac{1}{2}$，此时方程无解，

所以不存在点 Q 使得异面直线 NQ 与 SA 所成的角为 60°，所以 B 不正确；

对于（3）中，如图（2）所示，连接 AQ,AM,AN，设 $DQ=m(0\le m\le 2)$，

因为 $S_{\triangle AMQ}=S_{\square ABCD}-S_{\triangle ABM}-S_{\triangle QCM}-S_{\triangle ADQ}=2-\dfrac{m}{2}$，

所以，当 $m=0$ 时，即点点 Q 与 D 重合时，$S_{\triangle AMQ}$ 取得最大值 2，

又因为 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，且 N 分别是线段 SB 的中点，

可得点 N 到平面 AMQ 的距离为 $d=\dfrac{1}{2}SA=1$，

所以三棱锥 $Q-AMN$ 的体积的最大值为 $V_{Q-AMN}=V_{N-AMQ}=\dfrac{1}{3}\times 2\times 1=\dfrac{2}{3}$，所以 C 正确；

对于（4）中，由 $\overrightarrow{NQ}=(m-1,2,-1),\overrightarrow{NM}=(1,1,-1)$，

设平面 MNQ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{NQ}=(m-1)x+2y-z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{NM}=x+y-z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=2-m,z=3-m$，所以 $\vec{m}=(1,2-m,3-m)$，

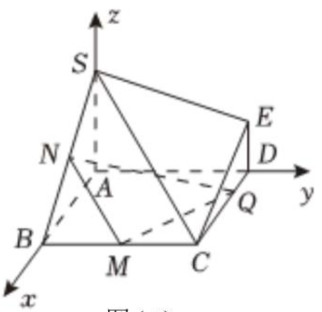
因为 $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，设直线 DC 与平面 MNQ 所成的角为 $\theta,\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

可得 $\sin\theta=\cos\overrightarrow{DC},\vec{m}=\dfrac{\left|\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(2-m)^2+(3-m)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2(m-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{3}{2}}}$，

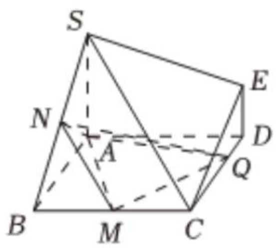
所以，当点 Q 自 D 向 C 处运动时，m 的值由 0 到 2 变大，$\sin\theta$ 单调递增，

此时 θ 也单调递增，所以 D 正确.

故答案为：（1）（3）（4）.



图(1)



图(2)

【点睛】方法点拨：求解立体几何中的动态问题与存在性问题的策略：

1、解答方法：一般时根据线面平行，线面垂直的判定定理和性质定理，结合圆或圆锥曲线的定义推断出动点的轨迹，有时也可以利用空间向量的坐标运算求出动点的轨迹方程；

2、对于线面位置关系的存在性问题，首先假设存在，然后再该假设条件下，利用线面位置关系的相关定理、性质进行推理论证，寻找假设满足的条件，若满足则肯定假设，若得出矛盾的结论，则否定假设；

3、对于探索性问题用向量法比较容易入手，一般先假设存在，设出空间点的坐标，转化为代数方程是否有解的问题，若由解且满足题意则存在，若有解但不满足题意或无解则不存在，同时，用已知向量来表示未知向量，一定要结合图形，以图形为指导思想是解答此类问题的关键.

三、解答题：本大题共6个小题，共85分.应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.【答案】(1) 2

(2) 2π

(3) -2，$x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in \mathrm{Z}$

【分析】(1) 根据 $f\left(0\right)=1$，即可求得答案；

(2) 利用正弦函数的周期公式，即可求得答案；

(3) 根据正弦函数的性质即可求出答案.

【小问1详解】

由于函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(0\right)=1$,

故 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1,\therefore A=2$；

【小问2详解】

由(1)知 $f\left(x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，故 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$；

【小问3详解】

$f\left(x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小值为-2，此时 $x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in \mathrm{Z}$，

即 $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in \mathrm{Z}$.

17.【答案】（1）$b=\sqrt{10}$

（2）$\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

（3）$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

【分析】（1）根据余弦定理即得；

（2）利用余弦定理可得 $\cos C$，然后利用同角关系式即得.

（3）结合（1）（2）由面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

因为 $a=2, c=3, \cos B=\dfrac{1}{4}$，

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2^2+3^2-2\times2\times3\times\dfrac{1}{4}=10$，

所以 $b=\sqrt{10}$；

【小问 2 详解】

由余弦定理可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{4+10-9}{2\times2\times\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$，

又 C 为 $\triangle ABC$ 的内角，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

【小问 3 详解】

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{10}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

18.【答案】（1）-1

（2）$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

【分析】（1）根据线性运算得到 $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{B_1C}=-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，然后根据数量积的运算律计算即可；

（2）利用数量积的运算律得到 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}$，然后求夹角的余弦值即可.

【小问 1 详解】

因为 $CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，所以 $AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2$

$=2-\sqrt{2}\cdot\cos 45°-\frac{1}{2}\times 2^2$

$=-1$.

【小问 2 详解】

$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\left(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=4-2+1$

$=3$，

因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，所以 $AA_1\perp AB$， $BB_1\perp BC$，

所以 $A_1B=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$， $B_1C=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

设直线 A_1B 与直线 B_1C 所成角为 θ，

所则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{B_1C}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\left|\overrightarrow{B_1C}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

19.【答案】(1) 见解析；(2) $\frac{1}{3}$；(3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【分析】

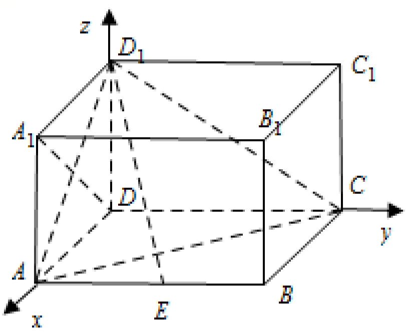
(1) 首先建立空间直角坐标系，证明 $\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0$；

(2) 求平面 ACD_1 的法向量，利用点到平面的距离的向量公式代入求解；

(3) 求平面 AD_1E 与平面 ACD_1 的法向量，利用法向量求二面角夹角的余弦值.

【详解】(1) 如图，以 $\overrightarrow{DA}$， $\overrightarrow{DC}$， $\overrightarrow{DD_1}$ 为 x,y,z 轴的正方形建立空间直角坐标系，建立空间直角坐标系，

$D_1(0,0,1)$， $E(1,1,0)$， $A_1(1,0,1)$， $D(0,0,0)$



$\overrightarrow{D_1E}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1\times(-1)+1\times 0+(-1)\times(-1)=0$，

所以 $D_1E\perp A_1D$；

（2）$A(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,1)$，$E(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{EA}=(0,1,0)$

设平面 ACD_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+2y=0\\ -x+z=0\end{cases}$，令 $y=1,$ 则 $x=2,z=2$，

所以 $\vec{n}=(2,1,2)$，

则点 E 到平面 ACD_1 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{EA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{3}$；

（3）由（1）可知 $A_1D\perp D_1E$，

又 $\because AD=AA_1$，$\therefore A_1D\perp AD_1$，且 $AD_1\cap D_1E=D_1$，

$\therefore A_1D\perp$ 平面 AD_1E，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$ 是平面 AD_1E 的法向量，

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{A_1D}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{A_1D}\right|}=\dfrac{2\times(-1)+2\times(-1)}{3\times\sqrt{1+1}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\because$ 平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角是锐角，

所以平面 AD_1E 与平面 ACD_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】思路点睛：本题第二问涉及点到平面的距离，1.可以采用等体积转化求解；2.利用向量法，直接代入公式求解；3.几何法，确定点在平面内的射影，或是利用面面垂直，点到交线的距离就是点到平面的距离.

20.【答案】(1）证明见解析

（2）1　（3）存在，$\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$.

【分析】(1）由线面垂直的性质有 $PA\perp CD$，又 $AD\perp CD$，根据线面垂直的判定即可证结论；

（2）构建以 A 为原点，建立空间直角坐标系，根据已知确定对应点坐标，求出平面 AEF 的法向量，应用向量法求线面角的正弦值；

（3）设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PB}$，根据点共面，利用 $\overrightarrow{AG}$ 与平面 AEF 一个法向量垂直，由向量垂直的坐标表示求 λ，即可确定结果.

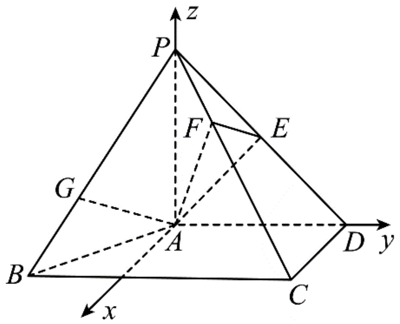
【小问 1 详解】

由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PA\perp CD$，

又 $AD \perp CD$， $PA \cap AD = A$， $PA, AD \subset$ 平面 PAD，所以 $CD \perp$ 平面 PAD.

【小问 2 详解】

以 A 为原点，平面 $ABCD$ 内与 AD 垂直的直线为 x 轴， $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 的正方向为 y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



则有 $A(0,0,0), P(0,0,2), C(2,2,0), D(0,2,0), B(2,-1,0)$，

E 为 PD 的中点，$\overrightarrow{PF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$，得 $E(0,1,1)$， $F\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，

则有 $\overrightarrow{AE} = (0,1,1)$， $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$， $\overrightarrow{PC} = (2,2,-2)$， $\overrightarrow{PB} = (2,-1,-2)$，

设平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，则 $\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \vec{m} = y + z = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \vec{m} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}$，

令 $y = 1$，则 $x = 1, z = -1$，得 $\vec{m} = (1,1,-1)$，

设直线 PC 与面 AEF 所成角为 θ，则有 $\sin\theta = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{PC}, \vec{m} \right\rangle\right| = \frac{\left|\overrightarrow{PC} \cdot \vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\vec{m}\right|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 1$，

所以直线 PC 与面 AEF 所成角的正弦值为 1.

【小问 3 详解】

若线段 PB 上存在点 G 使 A 、 E 、 F 、 G 四点共面，设 $\frac{PG}{PB} = \lambda$， $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，

则 $\overrightarrow{PG} = \lambda\overrightarrow{PB} = (2\lambda, -\lambda, -2\lambda)$， $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG} = (2\lambda, -\lambda, 2-2\lambda)$，

若 A 、 E 、 F 、 G 四点共面，则 AG 在平面 AEF 内，

又平面 AEF 的一个法向量为 $\vec{m} = (1,1,-1)$，则有 $\overrightarrow{AG} \cdot \vec{m} = 2\lambda - \lambda + 2\lambda - 2 = 0$，解得 $\lambda = \frac{2}{3}$.

所以线段 PB 上存在点 G，使得 A 、 E 、 F 、 G 四点共面，此时 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$.

21.【答案】（1）答案见解析

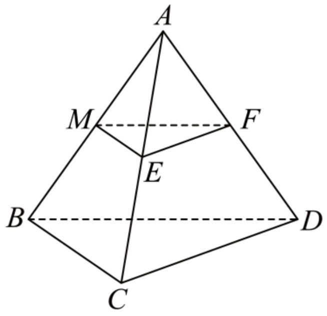
（2） $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

【分析】（1）分两种情况得出 a 的所有可能值以及相应的 α 的个数；

（2）先根据已知得出 $AD:DB=1:2, AE:EC=1:3, AF:FD=1:4$，再计算求得余弦值.

【小问 1 详解】

①情形一：分别取 AB, AC, AD 的中点 M, E, F，

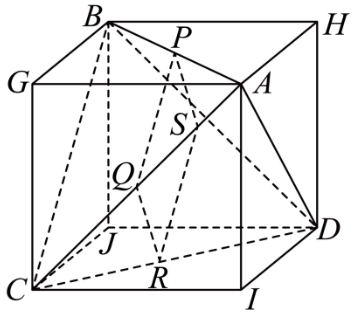


由中位线性质可知 $DE=EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

此时平面 DEF 为 Ω 的一个 1 阶等距平面，

b 为正四面体高的一半，等于 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由于正四面体有 4 个面，这样的 1 阶等距平面 α 平行于其中一个面，有 4 种情况；



②情形二：分别取 AB, AC, CD, DB 的中点 P, Q, R, S

将此正四面体放置到棱长为 1 的正方体中，

则 a 为正方体棱长的一半，等于 $\dfrac{1}{2}$.

由于正四面体的六条棱中有 3 组对棱互为异面直线，

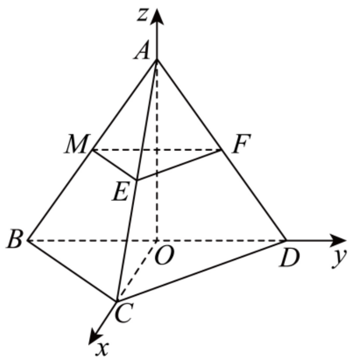
这样的 1 阶等距平面 α 平行于其中一组异面直线，有 3 种情况.

综上，当 a 的值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，α 有 4 个；当 a 的值为 $\dfrac{1}{2}$ 时，α 有 3 个.

【小问 2 详解】

在线段 AB, AC, AD 上分别取一点 M, E, F，

使得 $AM:MB=1:2, AE:EC=1:3, AF:FD=1:4$，则平面 β 即为平面 MEF.



如图，取 BD 中点 O，连接 OC,，以 O 为坐标原点，OC,OD 所在直线分别为 x,y 轴，过点 O 且与平面 BCD 垂直的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，

$A\left(\frac{\sqrt{6}}{6},0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，设

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{5\sqrt{6}}{36},\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{3}}{18}\right),$$

$$\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{45},\frac{4\sqrt{2}}{15},\frac{4\sqrt{3}}{45}\right),$$

设平面 MEF 法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{ME}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+4\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0\\ 5x+2\sqrt{3}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

所以 $\vec{m}=\left(0,1,-\sqrt{6}\right)$，

又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，

设平面 BCD 与 β 夹角为 θ

所以 $\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+6}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，

所以平面 BCD 与 β 夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.