



2024 北京延庆一中高一 10 月月考

数 学

总分：150 分 时长：120 分钟

一、单选题：本题共 10 小题，共 40 分。每题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x + 1 > 0\}$ ， $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{x \mid -1 < x \leq 3\}$ B. $\{0, 1, 2, 3\}$ C. $\{x \mid -1 < x < 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ ， $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$ ，则 $A \cup B = (\quad)$

- A. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$ B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ C. $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$ D. $\{x \mid 1 < x < 4\}$

3. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 且 $\complement_U A = \{2, 3\}$ ，则集合 A 的真子集的个数为()

- A. 3 B. 6 C. 7 D. 8

4. “ $\frac{1}{x} < 1$ ”是“ $x > 1$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 命题“ $\exists x > 0$ ， $x^2 - 2x - 7 > 0$ ”的否定是()

- A. $\exists x \leq 0$ ， $x^2 - 2x - 7 > 0$ B. $\exists x > 0$ ， $x^2 - 2x - 7 \leq 0$
C. $\forall x \leq 0$ ， $x^2 - 2x - 7 \leq 0$ D. $\forall x > 0$ ， $x^2 - 2x - 7 \leq 0$

6. 下列命题中正确的是()

- A. 若 $a > b$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. 若 $a < b$ ，则 $ac^2 < bc^2$
C. 若 $a^2 > b^2$ ，则 $a > b$ D. 若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ ，则 $a > b$

7. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 两个实数根一个小于 0，另一个大于 0，则实数 m 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 2)$

8. 已知集合 $A = \{x \mid x = k + \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$ ， $B = \{x \mid x = \frac{m}{2} - \frac{1}{3}, m \in \mathbf{Z}\}$ ，则集合 A, B 的关系是()

- A. $A \subsetneq B$ B. $B \subsetneq A$ C. $A = B$ D. 以上答案都不对

9. 若“ $\frac{x-1}{x-3} < 0$ ”是“ $|x-a| < 2$ ”的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是()

- A. $[1, 3]$ B. $(1, 3]$ C. $[-1, 3]$ D. $(-1, 3]$

10. 设集合 $M = \{x \mid m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\}$ ， $N = \{x \mid n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\}$ ，且 M, N 都是集合 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集，如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 的“长度”，那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{16}$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 设集合 $A = \{-a, 4\}$, $B = \{-2, a^2\}$, 若 $A = B$, 则 $a =$ _____.

12. 已知集合 $M = \{x|y = \frac{1}{x}\}$, $N = \{y|y = x^2 - 1\}$, 则 $M \cap N =$ _____, $M \cup N =$ _____.

13. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + 4a > 0$ 的解集为 R , 则 a 的一个取值为_____.

14. 已知 a, b 为不相等的实数, 记 $M = a^2 - ab$, $N = ba - b^2$, 则 M 与 N 的大小关系为_____.

15. 设集合 $A = \{x|x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x|mx + 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 m 的取值集合为_____.

16. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x|\frac{1}{3} < x < 1\}$,

① $a > 0$ ②. $c < 0$ ③ $a + b > 0$

④ 关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 $\{x|-3 < x < -1\}$

则上述结论正确的序号是_____.

三、解答题：本题共 5 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题 14 分)

设全集为 R , 集合 $A = \{x|3 \leq x < 7\}$, $B = \{x|2 < x < 6\}$, $C = \{x|a - 1 < x < 2a + 1\}$.

(1) 求 $A \cup B$, $(\complement_R A) \cap B$, $(\complement_R A) \cap (\complement_R B)$;

(2) 若 $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题 16 分)

求下列方程 (组) 或不等式的解集.

(1) $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$ (2) $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

(3) $|2x - 3| \geq 1$ (4) $\frac{2x}{x - 2} \leq 1$

19. (本小题 16 分)

已知集合 $A = \{x \in R|(k - 1)x^2 - 2x - 3 = 0\}$.

(1) 若集合 A 中至多有一个元素, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若集合 A 最少有一个真子集, 求实数 k 的取值范围.

20. (本小题 16 分)

已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根.

(1) 是否存在实数 k , 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 成立? 若存在, 求出 k 的值, 若不存在, 请说明理由;



(2) 若 k 是整数, 求使 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$ 的值为整数的所有 k 的值.

21. (本小题 18 分)

对于正整数集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$, 如果去掉其中任意一个元素 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合, 且这两个集合的所有元素之和相等, 那么称集合 A 为“和谐集”.

- (1) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 是否是“和谐集”(不必写过程);
- (2) 请写出一个只含有 7 个元素的“和谐集”, 并证明此集合为“和谐集”;
- (3) 当 $n = 5$ 时, 求证: 集合 A 不是“和谐集”.