2024 北京一零一中高三（上）统练三

数　　学

班级:______学号: _____姓名: ______成绩:

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

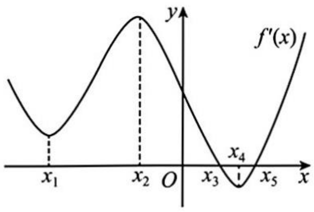
1. 在复平面内,复数 z 满足 iz=3-4i,则 z 的虚部为(　)

(A)3i　　(B)-3i　　(C)3　　(D)-3

2. 已知{ b_n}是等比数列,若 $b_2=3, b_6=27$, 则 b_4 的值为(　)

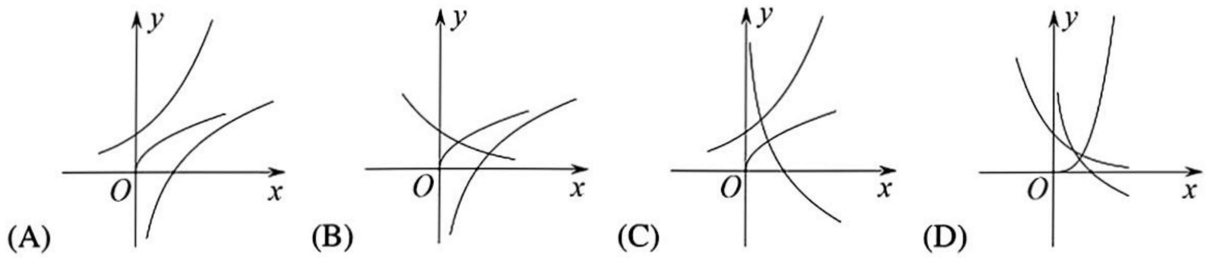
(A)9　　(B)-9　　(C)±9　　(D)81

3. 已知函数 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的图象如图所示，则 $f(x)$的极小值点为(　)



(A)x_1和 x_4　　(B)x_2　　(C)x_3　　(D)x_5

4. 在同一个坐标系中，函数 $f(x)=log_a x, g(x)=a^{-x}, h(x)=x^a$的部分图象可能是( )



5. 已知实数 $a>b>c,abc\neq0$,则下列结论一定正确的是(　)

$(A)\frac{a}{b}>\frac{a}{c}$　　(B) $ab> bc$　　$(C)\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$　　$(D)ab+bc>ac+b^2$

6. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的(　)

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

7. 已知函数$f(x)= A\cos(2x+\varphi)(A>0,|\varphi|<\pi)$是奇函数，且 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$,将 $f(x)$的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，所得图象对应的函数为 $g(x)$，则(　)

(A)$g(x)=\sin x$　(B)$g(x)=-\sin x$　$(C)g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　$(D)g(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

8. 荀子《劝学》中说：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海.”学习是日积月累的过程，每天进步一点点，前进不止一小点.若甲、 乙两同学当下的知识储备量均为 a，甲同学每天的“进步”率和乙同学每天的“退步”率均为 2%.n 天后，甲同学的知识储备量为$(1+2\%)^n a$,乙同学的知识储备量为$(1-2\%)^n a$,则甲、乙的知识储备量之比为 2 时需要经过的天数约为(　)

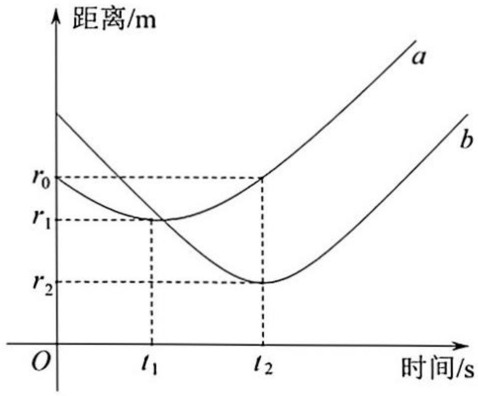
(参考数据: lg2≈0.3010,lg102≈2.0086,lg98≈1.9912)

(A)15　　(B)18　　(C)30　　(D)35

9. 若数列{ a_n}满足 $a_1=2,\frac{S_{n+1}+S_n}{a_{n+1}}=2n+3$,则 S_8+a_8的值为( )

(A)9　　(B)10　　(C)11　　(D)12

10. 2024 年 1 月 17 日我国自行研制的天舟七号货运飞船在发射 3 小时后成功对接于空间站天和核心舱后向端口，创造了自动交会对接的记录.某学校的航天科技活动小组为了探索运动物体追踪技术，设计了如下实验：目标 P 在地面轨道上做匀速直线运动；在地面上相距 $7m$ 的 A，B 两点各放置一个传感器，分别实时记录 A，B 两点与物体 P 的距离.科技小组的同学根据传感器的数据，绘制了“距离时间”函数图象，分别如曲线 a，b 所示. t_1 和 t_2分别是两个函数的极小值点. 曲线 a 经过(0，r_0)，(t_1,r_1)和(t_2, r_0),曲线 b 经过(t_2,r_2).已知. $r_1t_1=r_2t_2, r_1=4m, t_2=4s$,并且从 $t=0$ 时刻到 $t=t_2$ 时刻 P 的运动轨迹与线段 AB 相交.分析曲线数据可知，P 的运动轨迹与直线 AB 所成夹角的正弦值以及 P 的速度大小分别为(　)



$(A)\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{4}m/s$　$(B)\frac{6}{7},\frac{\sqrt{13}}{2}m/s$　$(C)\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{4}m/s$　$(D)\frac{2}{7},\frac{3\sqrt{5}}{2}m/s$

二、填空题共 5 小题。

11. 已知集合 A={-1,1,3},B={2,2a-1},A∩B={1},则实数 a 的值为______.

12. 函数 $f(x)=\sqrt{2x-1}-(4x-3)^0$的定义域是______.

13. 已知命题 $p:\exists x\in \boldsymbol{R}, ax^2+2ax+1\le 0$,若命题 p 为假命题，则实数 a 的取值范围是______.

14. 已知等边三角形 ABC 的边长为 4,E,F 分别是 AB,AC 的中点,则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}=$ ____;若 M，N 是线段 BC 上的动点，且|MN|= 1,则 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}$的最小值为______.

15. 已知函数 $f(x)=2^{[\sin x]}+3^{[\cos x]}$,其中[$x$]表示不超过 x 的最大整数.例如： [1] = 1, [0.5] = 0,[-0.5] =-1.给出以下四个结论:

①$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{4}{3}$;

②集合$\{y\in \boldsymbol{R}|y=f(x),x\in \boldsymbol{R}\}$的元素个数为 9;

③存在 $a\in\boldsymbol{R}$,对任意的 $x\in\boldsymbol{R}$,有$f(a-x)=f(a+x)$;

④若$f(x)>x+a$对任意$x\in[0,2\pi]$恒成立,则实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{3}{2}-2\pi\right]$.其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 等差数列{ a_n}中,首项$a_1 = 1$,且a_2+2, a_3, a_4-2.成等比数列.

(1) 求数列{ a_n}的通项公式;

(2)求数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前 n 项和， $S_n(n \in N^*)$.

17. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值；

(2)求函数 $f(x)$的单调递减区间及对称轴方程.

18. 已知△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $b^2+c^2=a^2-2bcsinA$.

(1)求 A 的大小;

(2)若 D 是边 AB 的中点,且 CD=2,求($c+2\sqrt{2}b$的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)=a\left(x+\frac{1}{x}-2\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)$.

(1)求 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)讨论 $f(x)$的单调区间.

20. 已知 $f(x)=(2x-1)e^{ax}-x$在 x=0 处的切线方程为$x+y+b=0$.

(1)求实数 a,b 的值;

(2)证明: $f(x)$仅有一个极值点 x_0,且 $f(x_0)<-\frac{3}{4}$;

(3) 若 $g(x)=(mx-1)e^{\mathrm{mx}}-x$,是否存在 m 使得$g(x)\geq -1$恒成立，若存在，请求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

21. 有穷数列$a_1,a_2,\ldots,a_n(n>2)$中，令 $S(p,q)=a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q(1\leq p\leq n,p,q\in N^*)$,当$p=q$时规定 $S(p,q)=a_{\mathrm{p}}$.

(1)已知数列 $-3,2,-1,3$,写出所有的有序数对$(p，q)$，且. $p<q$,使得 $S(p,q)>0$;

(2) 已知整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,n 为偶数.若 $S(i,n-i+1)\left(i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\right)$满足：当 i 为奇数时，$S(i,n-i+1)>0$;当 i 为偶数时， $S(i,n-i+1)<0$.求 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$的最小值；

(3) 已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足. $S(1,n)>0$,定义集合$A=\{i\mid S(i+1,n)>0, i=1,2,\cdots,n-1\}$..若 $A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}(k\in N^*)$且为非空集合，求证： $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

北京一零一中 2024-2025 学年度第一学期高三数学统练三参考答案

1. (2024 门头沟一模 2) D

2. A

   由题得 $b_4^2 = b_2 \cdot b_6 = 3 \times 27 = 81$, 而 $b_4 = b_2 \cdot q^2 > 0$, 则 $b_4 = 9$.

3. D

4. (2024 海淀高一上期末 4) C

5. D

   由题可知, $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, A 项中, 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$, 故 A 项错误; B 项中, 若 $a > 0 > b > c$, 则 $ab < 0, bc > 0$, 故 $ab < bc$, 故 B 项错误; C 项中, 若 $a > 0 > b > c$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$, 故 C 项错误; D 项中, $ab + bc > ac + b^2 \Rightarrow ab - ac > b^2 - bc \Rightarrow a(b-c) > b(b-c)$, 因为 $a > b > c, abc \neq 0$, 则 $b - c > 0$, 故 $ab + bc > ac + b^2$ 正确, 故 D 项正确. 故选 D.

6. (2018 东城二模理 5) A

7. (2023 通州高三上期中 9) A

   由题意可知 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z}), |\varphi| < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

   由 $f(\frac{3\pi}{4}) = -1 = A\cos(\frac{3\pi}{2} + \varphi) = -1$,

   因为 $A > 0$, 所以 $\cos(\frac{3\pi}{2} + \varphi) < 0$,

   所以 $\varphi = -\frac{\pi}{2}, A = 1$, 即 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin 2x$,

   故 $g(x) = \sin x$.

8. (2024 丰台高一上期末 9) B

9. B

   由 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 及 $\frac{S_{n+1} + S_n}{a_{n+1}} = 2n + 3$ 得 $S_{n+1} + S_n = (2n+3)(S_{n+1} - S_n)$, 即 $S_{n+1} + S_n = (2n+3)S_{n+1} - (2n+3)S_n$, 即 $(n+2)S_n = (n+1)S_{n+1}$, 所以 $\frac{S_n}{n+1} = \frac{S_{n+1}}{n+2}$, 即 $\left\{\frac{S_n}{n+1}\right\}$ 为常数列, 又 $\frac{S_1}{2} = \frac{a_1}{2} = 1$, 所以 $\frac{S_n}{n+1} = 1$, 即 $S_n = n + 1$, 所以 $S_8 = 9, S_7 = 8, a_8 = S_8 - S_7 = 1$, 所以 $S_8 + a_8 = 10$.

10. B

11. 1.

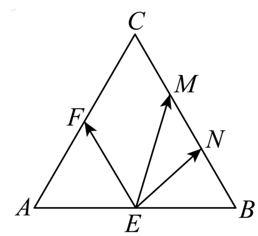
由题可得 $2^a - 1 = 1$, 即 $2^a = 2$, 解得 $a = 1$.

12. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$.

13. $[0, 1)$.

因为 “$\exists\, x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax + 1 \leqslant 0$” 为假命题, 所以其否定 “$\forall\, x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax + 1 > 0$” 为真命题, 当 $a = 0$ 时, 显然成立; 当 $a \neq 0$ 时, $ax^2 + 2ax + 1 > 0$ 恒成立, 则 $\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 4a < 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a < 1$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[0, 1)$.

14. (2023 大兴高三上期中 14) 2; $\frac{11}{4}$.



$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EA} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EA}^2 + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EA} = 2^2 + 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = 2$; 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|MN| = 1$, 不妨设 N 点相对 M 更靠近 B 点, 设 $|BN| = t\ (0 \leqslant t \leqslant 3)$, $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{EB}^2 + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = 2^2 + 2(t + t + 1)\cos 120^\circ + (t + 1)t = t^2 - t + 3 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}$ 取最小值, 且为 $\frac{11}{4}$.

15. (2021 东城高三上期末 (改编) 15) ①④.

16. (1) 因为 $a_2 + 2, a_3, a_4 - 2$ 成等比数列, 所以 $a_3^2 = (a_2 + 2)(a_4 - 2)$,

即 $(a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d + 2)(a_1 + 3d - 2)$, 解得 $d = 2$, 所以 $a_n = 2n - 1$.

(2) 因为 $S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$,

所以 $S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1) \times (2n + 1)}$

$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n + 1}) = \frac{n}{2n + 1}$.

17. (2015 朝阳高三上期中理 15)

(1) $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = \sqrt{3}\sin x - \cos x - 1 = 2\sin(x - \frac{\pi}{6}) - 1$.

$f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin\frac{\pi}{6} - 1 = 0$.

(2) 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leqslant x - \frac{\pi}{6} \leqslant 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 得 $2k\pi + \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\ (k \in \mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $[2k\pi + \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{3}]\ (k \in \mathbf{Z})$.

令 $x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 得 $x = k\pi + \frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程是 $x = k\pi + \frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbf{Z})$.

18. (1) 由余弦定理得 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{-2bc\sin A}{2bc} = -\sin A$,

所以 $\tan A = -1$.

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \dfrac{3\pi}{4}$.

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 设 $\angle ACD = \alpha$, 则 $\angle ADC = \dfrac{\pi}{4} - \alpha$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{4})$.

由正弦定理得 $\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{b}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)} = \dfrac{\frac{c}{2}}{\sin\alpha}$,

所以 $b = 2\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$, $c = 4\sqrt{2}\sin\alpha$.

所以 $c + 2\sqrt{2}b = 4\sqrt{2}\sin\alpha + 8\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$

$= 4\sqrt{2}\sin\alpha + 8(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha) = 4\sqrt{2}\cos\alpha$.

又 $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{4})$, 所以 $\cos\alpha \in (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1)$,

即 $c + 2\sqrt{2}b$ 的取值范围是 $(4, 4\sqrt{2})$.

19. (1) $f'(x) = a(1-\dfrac{1}{x^2}) - (x - \dfrac{1}{x})$, $f'(1) = 0$, $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

故 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -\dfrac{1}{2}$.

(2) $f'(x) = a(1-\dfrac{1}{x^2}) - (x - \dfrac{1}{x}) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}\cdot(a-x)$, $x > 0$.

①当 $a \leqslant 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 有

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极小值	↘

故单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$.

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = a$.

当 $0 < a < 1$ 时,

x	$(0,a)$	a	$(a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

故单调递增区间为 $(a, 1)$, 单调递减区间为 $(0, a), (1, +\infty)$

当 $a = 1$ 时, $f'(x) \leqslant 0$, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

当 $a > 1$ 时,

x	$(0,1)$	1	$(1,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

单调递增区间为 $(1,a)$, 单调递减区间为 $(0,1)$, $(a,+\infty)$.

20. (1) $f(0)=-1$, $f'(x)=2e^{ax}+a(2x-1)e^{ax}-1$, 所以 $f'(0)=1-a$,

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y+1=(1-a)x$, 所以 $a=2$, $b=1$.

(2) $f(x)=(2x-1)e^{2x}-x$, $f'(x)=4xe^{2x}-1$, 当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

$f''(x)=4e^{2x}+8xe^{2x}$, 当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$, $f'(x)$ 单调递增;

$f'(0)=-1<0$, $f'(\frac{1}{4})=\sqrt{e}-1>0$, 所以存在 $x_0\in(0,\frac{1}{4})$ 使得 $f'(x_0)=0$, 即 $4x_0e^{2x_0}=1$.

且当 $x<x_0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x>x_0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 仅有一个极值点 x_0, $f(x_0)=(2x_0-1)e^{2x_0}-x_0=\dfrac{2x_0-1}{4x_0}-x_0=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{1}{4x_0}+x_0)$.

因为 $x_0\in(0,\frac{1}{4})$, 所以 $\dfrac{1}{4x_0}+x_0>\dfrac{5}{4}$, 所以 $f(x_0)<-\dfrac{3}{4}$.

(3) $g'(x)=m^2xe^{mx}-1$,

则当 $x<0$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减, 所以 $g(x)\geqslant g(0)=-1$ 恒成立;

$g''(x)=m^2(1+mx)e^{mx}$.

当 $m>0$, $x>0$ 时, $g''(x)>0$, $g'(x)$ 单调递增, $g'(0)=-1<0$, $g'(\dfrac{1}{m^2})=e^{\frac{1}{m}}-1>0$,

所以存在 $x_0\in(0,\dfrac{1}{m^2})$ 使得 $g'(x_0)=0$, 当 $x_0>x>0$ 时 $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减,

$g(x_0)<g(0)=-1$, 不合题意;

当 $m\leqslant 0$, $x>0$ 时, $mx-1\leqslant -1$, 所以 $(mx-1)e^{mx}\leqslant -e^{mx}$,

所以 $g(2)\leqslant -e^{2m}-2<-2$, 不合题意.

综上, 不存在 m 使得 $g(x)\geqslant -1$ 恒成立.

21. (2024 东城一模 21)

(1) $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$.

(2) 由已知得 $S(k,n-k+1)$ 与 $S(k+1,n-k)$ 异号, 其中 $k\in\mathbf{N}^*$, $k\leqslant\dfrac{n}{2}-1$.

由于 $|a_k+a_{n-k+1}|=|S(k,n-k+1)-S(k+1,n-k)|=|S(k,n-k+1)|+|S(k+1,n-k)|\geqslant 2$,

因此 $|a_k|+|a_{n-k+1}|\geqslant 2$, $k=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$.

而 $|a_{\frac{n}{2}}|+|a_{\frac{n}{2}+1}|\geqslant 1, k=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}-1$, 所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\geqslant n-1$.

令 $n=2m$. 当 m 为奇数时, 取 $a_1=a_3=\cdots=a_m=1, a_2=a_4=\cdots=a_{m-1}=-1$,

$a_{m+3}=a_{m+5}=\cdots=a_{2m}=1, a_{m+2}=a_{m+4}=\cdots=a_{2m-1}=-1, a_{m+1}=0$ 时,

有 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=n-1$.

当 m 为偶数时, 取 $a_1=a_3=\cdots=a_{m-1}=1, a_2=a_4=\cdots=a_m=-1$,

$a_{m+3}=a_{m+5}=\cdots=a_{2m-1}=-1, a_{m+2}=a_{m+4}=\cdots=a_{2m}=1, a_{m+1}=0$ 时, $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=n-1$.

综上, $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$ 的最小值为 $n-1$.

(3) 对于数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, 不妨设 $i_1<i_2<\cdots<i_k$.

因此要证: $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$,

①首先考虑 $i_{m+1}-i_m\geqslant 2\ (m=1,2,\cdots,k-1)$, $2\leqslant i_1\leqslant i_k\leqslant n-1$ 的情况,

由于 $S(i_1,n)\leqslant 0$, $S(i_1+1,n)>0$, 所以 $a_{i_1}<0$.

同理 $a_{i_2}<0,\cdots,a_{i_k}<0$.

由已知 $S(1,n)>0$, 所以有 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

②下面考虑 $i_1,i_2,\cdots,i_k\ (i_1\geqslant 2)$ 中有一段是连续的正整数的情况,

即 $i_p-1\notin A, i_q+1\notin A, i_{m+1}-i_m=1, m=p,p+1,\cdots,q-1\ (1\leqslant p\leqslant q-1\leqslant k-1)$.

由于 $S(i_p,n)-S(i_q+1,n)=a_{i_p+1}+a_{i_p+2}+\cdots+a_{i_q}$,

由已知 $S(i_p,n)-S(i_q+1,n)<0$, 这说明此连续的 $q-p$ 项的和为负.

同理, 当含有多段的连续正整数的情况时, 每段的和为负.

再由①的结论可得: $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

③若在①, ②中 $i_1=1, i_2=2,\cdots,i_m=m, i_m+1\notin A$, 由于 $S(i_m+1,n)>0$,

此时去掉前 m 项, 则可转化为①, ②的情况,

所以有 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

④若 $A=\{1,2,\cdots m\}\ (m\leqslant n-1)$, 则 $a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n>0$,

所以此时有 $S(1,n)>a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$.

综上所述, 结论成立.