



首师大附中 2024 级高一学业质量诊断（一）

数 学

2024 年 10 月 12 日

第 I 卷（共 30 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题所列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的）

1. 已知集合  $U = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 \leq x < 7\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$

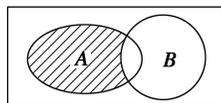
- A.  $\emptyset$                       B.  $\{1, 2, 3\}$                       C.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$                       D.  $\{0, 1, 2, 3, 6\}$

2. 命题“ $\exists x < 2$ ,  $x^2 - 2x < 0$ ”的否定是

- A.  $\exists x \geq 2$ ,  $x^2 - 2x \geq 0$                       B.  $\forall x \geq 2$ ,  $0 < x < 2$   
C.  $\exists x < 2$ ,  $x^2 - 2x \geq 0$                       D.  $\forall x < 2$ ,  $x \leq 0$  或  $x \geq 2$

3. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}$ , 下图中阴影部分所表示的集合为

- A.  $\{1\}$                       B.  $\{1, 2\}$   
C.  $\{1, 2, 3\}$                       D.  $\{0, 1, 2\}$



4. 对于任意实数  $a, b, c$ , 下列命题中, 真命题为

- A. 若  $a > b$ ,  $c \neq 0$ , 则  $ac > bc$                       B. 若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$   
C. 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$                       D. 若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

5. 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $\{x \mid -2 < x < 1\}$ , 那么关于  $x$  的不等式

$cx^2 - ax + b > 0$  的解集为

- A.  $\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 1\}$                       B.  $\{x \mid x < -\frac{1}{2}$  或  $x > 1\}$   
C.  $\{x \mid -1 < x < \frac{1}{2}\}$                       D.  $\{x \mid x < -1$  或  $x > \frac{1}{2}\}$



第 II 卷 (共 70 分)



二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

11. 方程组  $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 2x - 3y = 27 \end{cases}$  的解集用列举法表示为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $x, y$  为正实数, 且满足  $4x + y = 40$ , 则  $x \cdot y$  的最大值是\_\_\_\_\_.

13. 已知全集  $U = \{3, 7, a^2 - 2a - 3\}$ ,  $A = \{7, |a - 7|\}$ ,  $\complement_U A = \{5\}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

14. 设  $x_1, x_2$  是方程  $x^2 + px + q = 0$  的两实根,  $x_1 + 1, x_2 + 1$  是关于  $x$  方程  $x^2 + qx + p = 0$  的两实根, 则  $p =$ \_\_\_\_\_,  $q =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x < a\}$ ,  $B = \{-1, 2\}$ , 若  $(\complement_U A) \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 李明经营一家网店, 售卖  $A$  商品, 每售出一件获利 8 元. 现计划在“十一”期间对  $A$  商品进行广告促销, 假设售出  $A$  商品的件数  $m$  (单位: 万件) 与广告费用  $x$  (单位: 万元) 符合函数模型  $m = 3 - \frac{2}{x+1}$ . 若要使这次促销活动获利最多, 则广告费用  $x$  应为

\_\_\_\_\_ 万元. (注: 利润 = 销售额 - 广告费用)

17. 已知  $p: \exists x \in \mathbf{R}, mx^2 + 1 \leq 0, q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + mx + 1 > 0$ , 若  $p$  或  $q$  至少有一个为真, 则实数  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

18. 给定数集  $A$ , 对于任意  $a, b \in A$ , 有  $a + b \in A$  且  $a - b \in A$ , 则称集合  $A$  为闭集合. 则以下结论中, 错误的命题是\_\_\_\_\_.

① 集合  $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$  为闭集合

② 集合  $A = \{n | n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$  为闭集合

③ 若集合  $A_1, A_2$  为闭集合, 则  $A_1 \cup A_2$  为闭集合

④ 若集合  $A_1, A_2$  为闭集合, 且  $A_1 \subseteq \mathbf{R}, A_2 \subseteq \mathbf{R}$ , 则存在  $c \in \mathbf{R}$ , 使得  $c \notin (A_1 \cup A_2)$

三、解答题（本大题共 2 小题，共 28 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. （本小题 12 分）解不等式组

(I)  $\frac{3x-2}{x-6} \leq 1$ ;

(II)  $ax^2 - (a-2)x - 2 > 0$ .



20. （本小题 16 分）已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根.

(I) 若  $x_1, x_2$  均为正根，求实数  $k$  的取值范围；

(II) 求使  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$  的值为整数的  $k$  的整数值；

(III) 是否存在实数  $k$ ，使得  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$  成立？若存在，求出  $k$  的值；若不存在，请说明理由.

首师大附中 2024 级高一学业质量诊断 (一)

数 学

2024 年 10 月 12 日

一、 选择题(4\*12=48)

答案: ADBCD CADBB

二、 填空(4\*6=24)

11.  $\{(3, -7)\}$

12. 100

13. 4

14.  $p=1, q=2$

15.  $a \leq 2$

16. 3

17.  $m < 2$

18. 1, 3, 4



三、 解答题 (本大题共 5 小题, 共 50 分。应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19.

【解】 (I)  $\frac{3x-2}{x-6} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-6} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-6} \leq 0$

所以  $\begin{cases} x-6 > 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x-6 < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ .

① 若  $\begin{cases} x-6 > 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $\begin{cases} x > 6 \\ x \leq -2 \end{cases}$ , 无解.

② 若  $\begin{cases} x-6 < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $-2 \leq x < 6$ .

综上, 原不等式的解集为  $[-2, 6)$ .

(II)  $ax^2 - (a-2)x - 2 > 0 \Leftrightarrow (ax+2)(x-1) > 0$



① 当  $a = 0$  时, 原不等式  $\Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ;

② 当  $a \neq 0$  时, 原不等式  $\Leftrightarrow a(x + \frac{2}{a})(x - 1) > 0$ ;

(1) 当  $a > 0$  时,  $-\frac{2}{a} < 1$  恒成立, 故  $x < -\frac{2}{a}$  或  $x > 1$ .

(2) 当  $a < 0$  时.

1) 当  $-\frac{2}{a} < 1$  时, 即  $a < -2$  时, 此时  $-\frac{2}{a} < x < 1$ .

2) 当  $-\frac{2}{a} = 1$  时, 即  $a = -2$  时, 无解.

3) 当  $-\frac{2}{a} > 1$  时, 即  $-2 < a < 0$  时, 此时  $1 < x < -\frac{2}{a}$ .

20. 已知  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根.

(1) 若  $x_1, x_2$  均为正根, 求实数  $k$  的取值范围;

(2) 求使  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$  的值为整数的  $k$  的整数值;

(3) 是否存在实数  $k$ , 使得  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$  成立? 若存在, 求出  $k$  的值; 若不存在, 请说明理由.

**【答案】** 解: (1)  $\because x_1, x_2$  是一元二次方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个正根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16k^2 - 4 \times 4k(k + 1) = -16k \geq 0, \quad \text{且 } 4k \neq 0, \quad x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 x_2 = \frac{k+1}{4k} > 0,$$

解得:  $k < -1$ , 即实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, -1)$ ;

(2)  $\because x_1, x_2$  是一元二次方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16k^2 - 4 \times 4k(k + 1) = -16k \geq 0, \quad \text{且 } 4k \neq 0, \therefore k < 0,$$

$$\because x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = \frac{k+1}{4k},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} - 2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 4 = \frac{4k}{k+1} - 4 = -\frac{4}{k+1},$$

又  $k < 0$ ,

解得  $k = -2, -3, -5$ ;

(3)  $\because x_1, x_2$  是一元二次方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16k^2 - 4 \times 4k(k+1) = -16k \geq 0, \text{ 且 } 4k \neq 0, \therefore k < 0,$$

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = \frac{k+1}{4k},$$

若  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$  , 即

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2 = 2 - \frac{9k+9}{4k} = -\frac{3}{2}.$$

解得  $k = \frac{9}{5}$ , 与  $k < 0$  矛盾, 故不存在.

