

# 和平街第一中学高一数学月考试题(2024. 10)

(考试时间: 90 分钟, 满分 150 分)

## 第 I 卷(选择题, 共 40 分)



### 一、单选题(每小题 4 分, 共 40 分)

1. 设集合  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
A.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$     B.  $\{1, 2\}$     C.  $\{0, 1, 2, 3\}$     D.  $\{1, 2, 3\}$
2. 已知命题  $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \leq 0$ , 则命题  $p$  的否定为 ( )  
A.  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} > 0$     B.  $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$   
C.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$     D.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$
3. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 5\}$ , 则下列结论正确的是 ( )  
A.  $B \subseteq A$     B.  $\complement_U A = \{1, 5\}$     C.  $A \cup B = \{3\}$     D.  $A \cap B = \{2, 4, 5\}$
4. 设集合  $A = \{x, y\}$ ,  $B = \{0, x^2\}$ , 若  $A = B$ , 则  $2x + y$  等于 ( )  
A. 0    B. 1    C. 2    D. -1
5. 已知  $x > 0$ , 则  $x + \frac{2}{x}$  的最小值为 ( )  
A.  $\sqrt{2}$     B. 2    C.  $2\sqrt{2}$     D. 4
6. 若  $a, b$  是任意实数, 且  $a > b$ , 则 ( )  
A.  $a^2 > b^2$     B.  $\frac{b}{a} < 1$     C.  $a - b > 1$     D.  $a - b > 0$
7. 不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为 ( )  
A.  $(-1, 3)$     B.  $(-3, 1)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$     D.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
8. “ $0 < x < 2$ ”是“ $-1 < x < 3$ ”的 ( )  
A. 充分而不必要条件    B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
9. 已知集合  $A = \{0, a\}$ ,  $B = \{b \mid b^2 - 3b < 0, b \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $a$  的值为 ( )  
A. 1    B. 2    C. 1 或 2    D. 2 或 3

10. 设集合  $A$  的最大元素为  $M$ ，最小元素为  $m$ ，记  $A$  的特征值为  $X_A = M - m$ ，若集合中只有一个元素，规定其特征值为 0. 已知  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  是集合  $\mathbb{N}^*$  的元素个数均不相同的非空真子集，且  $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 60$ ，则  $n$  的最大值为 ( )

- A. 10                      B. 11                      C. 12                      D. 13

第 II 卷 (非选择题 共 110 分)



二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分).

11. 已知函数  $f(x) = 4x + 3$ ，则  $f(3) =$  \_\_\_\_\_

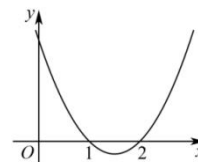
12. 设  $x, y$  满足  $x + y = 10$ ，且  $x, y$  都是正数，则  $xy$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

13. 满足  $\{1\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3\}$  的集合  $A$  的个数为 \_\_\_\_\_ 个.

14. 已知集合  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2a, a^2 + a\}$ . 若  $A \cap B = \{2\}$ ，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的图像如图所示，则不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集

是 \_\_\_\_\_，不等式  $\frac{ax+b}{cx+a} < 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.



三、解答题 (六小题, 共 85 分)

16. (本题 14 分) 已知集合  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ，集合  $B = \{x | x > 2\}$ .

(1) 化简集合  $A$  并求  $A \cap B, A \cup B$ .

(2) 若全集  $U = \mathbb{R}$ ，求  $B \cap (\complement_U A)$ .

17. (本题 14 分) 完成如下三个小题并写出必要过程

(1) 设  $M=(x+2)(x+3)$ ,  $N=(x+1)(x+4)$ , 比较  $M, N$  的大小.

(2) 已知  $a>b, c<d$ , 求证:  $a-c>b-d$ ;

(3) 已知  $x \in \mathbb{R}$ , 设  $A=x(x-1)$ ;  $B=x-2$ , 比较  $A$  与  $B$  的大小.



18. (本题 14 分) 已知集合  $A=\{x|-4<x<5\}$ ,  $B=\{x|-3<x<6\}$ ,

$C=\{x|m-1 \leq x \leq 2m+1, m \in \mathbb{R}\}$ .

(1) 求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ;

(2) 若  $C \subseteq (A \cap B)$ , 求实数  $m$  的取值范围

19. (本题 14 分) 函数  $f(x)=mx^2+4mx+3$

(1) 若  $m=1$ , 求  $f(x) \leq 0$  的解集;

(2) 当  $f(x) > 0$  恒成立时, 求  $m$  的取值范围;

(3) 若方程  $f(x)=0$  有两个实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2 > 0$ , 求  $m$  的取值范围.

20. (本题 14 分) 设一个矩形长为  $x$ , 宽为  $y$ .

(1) 当点  $P(x, y)$  位于直线  $y = -x + 4$  上时, 求该矩形面积的最大值.

(2) 当点  $P(x, y)$  位于曲线  $y = \frac{8}{2x-1} \left( x > \frac{1}{2} \right)$  上时, 求该矩形周长的最小值.

(3) 当该矩形的面积比周长多 5 时, 求该矩形面积的取值范围.



21. (本题 15 分) 设集合  $A \subseteq \mathbf{N}^*$ . 定义: 和集合  $B = \{x + y \mid x, y \in A, x \neq y\}$ , 积集合

$C = \{x \cdot y \mid x, y \in B, x \neq y\}$ , 分别用  $|A|, |B|, |C|$  表示集合  $A, B, C$  中元素的个数.

(1) 若  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 求集合  $C$ ;

(2) 若  $|A| = 5$ , 求  $|B|$  的所有可能的值组成的集合;

(3) 若  $|A| = 4$ , 求证:  $|C| \geq 9$

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	B	C	C	D	A	A	C	B

1. C

【分析】根据集合交集运算求解即可.

【详解】 $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ ,

故选: C.

2. D

【分析】根据特称命题的否定是全称命题可得答案.

【详解】 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} \leq 0$ ,

则命题  $p$  的否定为  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$ .

故选: D.

3. B

【解析】利用集合的包含关系可判断 A 选项的正误, 利用集合的基本运算可判断 BCD 选项的正误.

【详解】已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 5\}$ .

对于 A 选项,  $B \not\subset A$ , A 选项错误;

对于 B 选项,  $\complement_U A = \{1, 5\}$ , B 选项正确;

对于 C 选项,  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ , C 选项错误;

对于 D 选项,  $A \cap B = \{3\}$ , D 选项错误.

故选: B.

4. C

【分析】根据元素的确定性可得  $x=0$  或  $y=0$ , 再利用元素的互异性可确定  $y=0$ ,  $x=1$ , 从而可得正确的选项.

【详解】由  $A=B$ , 得  $x=0$  或  $y=0$ .

当  $x=0$  时,  $x^2=0$ , 不满足集合中元素的互异性, 舍去;

当  $y=0$  时,  $x^2=x$ , 则  $x=0$  或  $x=1$ , 由上知  $x=0$  不合适, 故  $y=0$ ,  $x=1$ ,



则  $2x + y = 2$ .

故选: C.

【点睛】本题考查集合相等的性质以及集合元素的确定性和互异性,一般地,我们利用确定性求值,利用互异性取舍,本题属于基础题.

5. C

【分析】根据给定条件利用均值不等式直接计算作答.

【详解】因为  $x > 0$ , 则  $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$ , 当且仅当  $x = \frac{2}{x}$ , 即  $x = \sqrt{2}$  时取“=”,

所以  $x + \frac{2}{x}$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ .

故选: C

6. D

【分析】利用不等式性质一一判定选项即可.

【详解】若  $a = 0 > b = -1 \Rightarrow a^2 < b^2$ , 故 A 错误;

若  $a = -1 > b = -2 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2 > 1$ , 故 B 错误;

若  $a = 0 > b = -1 \Rightarrow a - b = 1$ , 故 C 错误;

显然  $a > b \Leftrightarrow a - b > b - b = 0$ , 故 D 正确.

故选: D

7. A

【分析】根据一元二次不等式的解法计算可得.

【详解】不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$ , 即  $(x+1)(x-3) < 0$ , 解得  $-1 < x < 3$ ,

所以不等式  $x^2 - 2x - 3 < 0$  的解集为  $(-1, 3)$ .

故选: A

8. A

【分析】根据集合的包含关系即可判断.

【详解】因为  $\{x | 0 < x < 2\} \subseteq \{x | -1 < x < 3\}$ ,

所以  $0 < x < 2$  是  $-1 < x < 3$  的充分而不必要条件.

故选: A.

9. C

【分析】首先解一元二次不等式即可求出集合  $B$ , 再根据  $A \cap B \neq \emptyset$  求出  $a$  的值.



【详解】由  $b^2 - 3b < 0$ ，即  $b(b-3) < 0$ ，解得  $0 < b < 3$ ，

所以  $B = \{b \mid b^2 - 3b < 0, b \in \mathbb{Z}\} = \{b \mid 0 < b < 3, b \in \mathbb{Z}\} = \{1, 2\}$ ，

又  $A = \{0, a\}$  且  $A \cap B \neq \emptyset$ ，

所以  $a = 1$  或  $a = 2$ 。

故选：C。

10. B

【分析】根据题设描述只需保证各集合中  $X_{A_n} = M - m$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 尽量小，结合已知及集合的性质有  $n$  最大时  $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = \frac{n(n-1)}{2}$ ，进而分析  $n$  的取值。

【详解】由题设  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  中都至少有一个元素，且元素个数互不相同，

要使  $n$  最大，则各集合中  $X_{A_n} = M - m$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 尽量小，

所以集合  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  的元素个数尽量少且数值尽可能连续，

所以，不妨设  $X_{A_1} = 0, X_{A_2} = 1, X_{A_3} = 2, \dots, X_{A_n} = n-1$ ，有  $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = \frac{n(n-1)}{2}$ ，

当  $n = 11$  时， $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 55 < 60$ ，

当  $n = 12$  时， $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 66 > 60$ ，

只需在  $n = 11$  时，在上述特征值取最小情况下，使其中一个集合的特征值增加 5 即可，故  $n$  的最大值为 11。

故选：B

【点睛】关键点点睛：注意  $n$  最大则各集合中  $X_{A_n} = M - m$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 尽量小，并求出该情况下特征值之和关于  $n$  的公式，再分析其最大取值。

11. 15

【分析】代值求解可得。

【详解】 $\because f(x) = 4x + 3$ ， $\therefore f(3) = 4 \times 3 + 3 = 15$ 。

故答案为：15。



12. 4

【解析】根据子集的定义即可得到集合 A 的个数；

【详解】 $\because \{1\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3\}$ ,

$\therefore A = \{1\}$  或  $\{1, 2\}$  或  $\{1, 3\}$  或  $\{1, 2, 3\}$ ,

故答案为: 4.



13. 25

【分析】由基本不等式即可求解.

【详解】由于  $x$ 、 $y$  都是正数, 故  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 25$ , 当且仅当  $x = y = 5$  时等号成立,

故  $xy$  的最大值为 25,

故答案为: 25

14. -2

【分析】根据交集的定义, 结合集合中元素的互异性进行求解即可.

【详解】当  $2a = 2$  时,  $a = 1$ , 此时  $B = \{2, 2\}$ , 不满足集合中元素的互异性, 所以  $a = 1$  (舍);

当  $a^2 + a = 2$  时, 可得  $a = -2, a = 1$  (舍),

此时,  $B = \{-4, 2\}$ , 满足条件, 所以  $a = -2$ .

故答案为: -2

15.  $\{x | 1 < x < 2\}$        $\left\{x | -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$

【分析】根据图像求出  $a, b, c$  之间的关系, 再解不等式  $\frac{ax+b}{cx+a} < 0$  即可.

【详解】由函数图像知,  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集为  $\{x | 1 < x < 2\}$ ;

从而  $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=0, \end{cases}$  且  $a > 0$ , 解得  $b = -3a$  且  $c = 2a (a > 0)$ ,

所以不等式  $\frac{ax+b}{cx+a} < 0$  等价于  $\frac{x-3}{2x+1} < 0$ , 等价于  $(x-3)(2x+1) < 0$ , 解得  $-\frac{1}{2} < x < 3$ ;

故答案为:  $\{x | 1 < x < 2\}; \left\{x | -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$ .



16 题. (1)  $A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ ,  $A \cup B = \{x | x > 1\}$ ;

(2)  $\{x | x \geq 3\}$ .

【分析】(1) 解二次不等式得集合  $A$ , 利用交并运算的定义求解即可;

(2) 先求补集  $\complement_U A$ , 进而求交集即可.

【详解】(1)  $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\} = \{x | 1 < x < 3\}$ ,

$\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ ,  $A \cup B = \{x | x > 1\}$ .

(2)  $\because \complement_U A = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$ ,

$\therefore B \cap (\complement_U A) = \{x | x \geq 3\}$ .



17 题.  $M > N$

【分析】直接作差比较大小即可.

【详解】 $M - N = (x+2)(x+3) - (x+1)(x+4) = (x^2 + 5x + 6) - (x^2 + 5x + 4) = 2 > 0$

$\therefore M > N$

18 题. (1)  $A \cup B = \{x | -4 < x < 6\}$ ,  $A \cap B = \{x | -3 < x < 5\}$

(2)  $m < -2$  或  $-2 < m < 2$ .

【分析】(1) 根据集合的交并运算求得  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ;

(2) 根据  $C$  是否为空集进行分类讨论, 由此求得  $m$  的取值范围.

【详解】(1)  $A = \{x | -4 < x < 5\}$ ,  $B = \{x | -3 < x < 6\}$ ,

$\therefore A \cup B = \{x | -4 < x < 6\}$ ,  $A \cap B = \{x | -3 < x < 5\}$ .

(2)  $A \cap B = \{x | -3 < x < 5\}$ ,

当  $C = \emptyset$  时,  $m - 1 > 2m + 1$ ,  $\therefore m < -2$ .

$$\text{当 } C \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} m \geq -2 \\ m-1 > -3, \therefore -2 < m < 2. \\ 2m+1 < 5 \end{cases}$$

综上所述,  $m < -2$  或  $-2 < m < 2$ .



19. (1)  $[-3, -1]$

(2)  $\left[0, \frac{3}{4}\right)$

(3)  $m > \frac{15}{16}$  或  $m < 0$

【分析】(1) 把  $m=1$  代入, 结合二次不等式的求解方法可得答案;

(2) 讨论二次型函数的系数, 结合判别式可得答案;

(3) 利用韦达定理及限制条件可得答案.

【详解】(1) 当  $m=1$  时, 原不等式等价于  $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ , 解得  $-3 \leq x \leq -1$ , 所以  $f(x) \leq 0$  的解集为  $[-3, -1]$ .

(2) 当  $m=0$  时,  $f(x)=3 > 0$  恒成立;

当  $m > 0$  时,  $f(x) > 0$  恒成立, 则有  $16m^2 - 12m < 0$ , 解得  $0 < m < \frac{3}{4}$ ,

当  $m < 0$  时,  $f(x) > 0$  显然不恒成立.

综上,  $m$  的取值范围是  $\left[0, \frac{3}{4}\right)$ .

(3)  $f(x)=0$  有两个实数根, 所以  $m \neq 0$ ,  $\Delta = 16m^2 - 12m \geq 0$ , 解得  $m \geq \frac{3}{4}$  或  $m < 0$ ,

$$x_1 + x_2 = -4, x_1 x_2 = \frac{3}{m},$$

因为  $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 x_2 > 0$ , 所以  $(x_1 + x_2)^2 - 5x_1 x_2 > 0$ ,

$$16 - \frac{15}{m} > 0 \text{ 解得 } m > \frac{15}{16} \text{ 或 } m < 0,$$

综上可得  $m > \frac{15}{16}$  或  $m < 0$ .

20. 待完成

21. (1)  $C = \{12, 15, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 42\}$

(2)  $\{7, 8, 9, 10\}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据新定义直接求解  $B, C$ ;

(2) 令  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ , 由和集合得到数的大小关系, 再讨论大小关系分类求解;

(3) 记  $A$  集合为  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 且  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ , 由和集合得到数的大小关系, 求出  $B$  有两种可能, 当  $|B|=6$  得  $|C| \geq 9$ , 由  $|B|=5$  及数的大小关系分别讨论  $|C| \neq 7$  和  $|C| \neq 8$ , 讨论五种情况即可求解.

【详解】(1) (1) 由  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

$C = \{12, 15, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 42\}$ .

(2) 当  $|A|=5$ , 不妨记  $A$  集合为  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ,

且令  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ,

则必有  $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5$ ,

和中剩下的  $a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_2 + a_5$  满足  $a_1 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_5$ ,

并且  $a_1 + a_3 < a_1 + a_4, a_2 + a_3 < a_3 + a_5$ , 下列有四种可能:

一是  $a_1 + a_4 = a_2 + a_3, a_1 + a_5 = a_2 + a_4, a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ , 则  $|B|=7$ ;

二是  $a_1 + a_4$  与  $a_2 + a_3, a_1 + a_5$  与  $a_2 + a_4, a_2 + a_5$  与  $a_3 + a_4$  三对数有两对相等,

另一对不相等, 则  $|B|=8$ ;

三是  $a_1 + a_4$  与  $a_2 + a_3, a_1 + a_5$  与  $a_2 + a_4, a_2 + a_5$  与  $a_3 + a_4$  三对数有一对相等,

其它两对不相等, 则  $|B|=9$ ;

四是  $a_1 + a_4$  与  $a_2 + a_3, a_1 + a_5$  与  $a_2 + a_4, a_2 + a_5$  与  $a_3 + a_4$  三对数全不相等, 则  $|B|=10$ ;

综上所述,  $|B|$  的所有可能的值组成的集合为  $\{7, 8, 9, 10\}$ .



(3) 当 $|A|=4$ , 不妨记A集合为 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ,

则必有 $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4$ ,

和中剩下的元素为 $a_1 + a_4$ , 满足 $a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4$ ,

所以 $|B|$ 有两种可能, 当 $a_1 + a_4 \neq a_2 + a_3$ ,  $|B|=6$ ; 当 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ,  $|B|=5$ ;

i) 当 $|B|=6$ , 不妨记这6个元素为 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ , 且让 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6$ ,

则必有 $b_1 b_2 < b_1 b_3 < b_2 b_3 < b_2 b_4 < b_3 b_4 < b_3 b_5 < b_4 b_5 < b_4 b_6 < b_5 b_6$ , 所以 $|C| \geq 9$ ;

ii) 当 $|B|=5$ ,  $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ,

不妨记 $b_1 = a_1 + a_2$ ,  $b_2 = a_1 + a_3$ ,  $b_3 = a_2 + a_3$ ,  $b_4 = a_2 + a_4$ ,  $b_5 = a_3 + a_4$ ,

则 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ , 则必有 $b_1 b_2 < b_1 b_3 < b_2 b_3 < b_2 b_4 < b_3 b_4 < b_3 b_5 < b_4 b_5$ ,

积中剩下的 $b_1 b_4, b_1 b_5, b_2 b_5$ 满足 $b_1 b_4 < b_1 b_5 < b_2 b_5$ , 则 $|C| \geq 7$ ,

下面先证明 $|C| \neq 7$ .

假设 $|C|=7$ , 由 $b_1 b_3 < b_1 b_4 < b_2 b_4 < b_2 b_5 < b_3 b_5$ , 则 $b_1 b_4 = b_2 b_3, b_1 b_5 = b_2 b_4, b_2 b_5 = b_3 b_4$ ,

即 $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3}, \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_5}{b_4}, \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_5}{b_4}$ , 所以 $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4}$ ,

令 $\frac{b_2}{b_1} = q$ , 由 $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 则 $b_1 + b_1 q^4 = b_1 q + b_1 q^3$ ,

所以 $1 + q^4 = q + q^3$ , 则 $q = 1$ , 与事实不符, 所以 $|C| \neq 7$ .

下面再证明 $|C| \neq 8$ .

由上述分析知: 要使 $|C|=8$ , 积中剩下的 $b_1 b_4, b_1 b_5, b_2 b_5$ 满足 $b_1 b_4 < b_1 b_5 < b_2 b_5$ ,

必有两对积与 $b_1 b_2, b_1 b_3, b_2 b_3, b_2 b_4, b_3 b_4, b_3 b_5, b_4 b_5$ 七对中的两对相等, 有如下五种情况:

一是 $\begin{cases} b_2 b_3 = b_1 b_4 \\ b_2 b_4 = b_1 b_5 \end{cases}$ , 则可推得 $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4}$ , 令其比值为 $t$ , 则 $t > 1$ ,

于是 $b_3 = t b_4, b_2 = t b_1$ , 由 $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ ,

则 $b_1 + t b_4 = t b_1 + b_4$ , 则 $(t-1)(b_1 - b_4) = 0$ , 显然无解, 故此情况不能;



二是  $\begin{cases} b_2b_3 = b_1b_4 \\ b_3b_4 = b_1b_5 \end{cases}$ , 则可推得  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3}, \frac{b_3}{b_1} = \frac{b_5}{b_4}$ , 令  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3} = t_1, \frac{b_3}{b_1} = \frac{b_5}{b_4} = t_2$ ,

显然  $t_2 > t_1 > 1$ , 由  $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 则  $b_1 + t_2b_4 = t_1b_1 + b_4$ ,

所以  $(t_2 - 1)b_4 = (t_1 - 1)b_1$ , 而显然  $(t_2 - 1)b_4 > (t_1 - 1)b_1$ , 故此情况不可能;

三是  $\begin{cases} b_2b_3 = b_1b_4 \\ b_3b_4 = b_2b_5 \end{cases}$ , 则可推得  $\frac{b_3}{b_1} = \frac{b_4}{b_2} = \frac{b_5}{b_3}$ , 令其比值为  $t$ , 则  $t > 1$ , 由  $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = 2b_3$ ,

又  $b_3^2 = b_1b_5$ , 则  $b_1 + b_5 = 2\sqrt{b_1b_5}$ , 这与  $b_1 + b_5 > 2\sqrt{b_1b_5}$  矛盾, 故此情况不可能;

四是  $\begin{cases} b_2b_3 = b_1b_5 \\ b_3b_4 = b_2b_5 \end{cases}$ , 可推得  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_3} = \frac{b_4}{b_2}$ , 令其比值为  $t$ , 则  $t > 1$ ,

于是  $b_3 = tb_3, b_2 = tb_1, b_4 = tb_2 = t^2b_1, a_2 + a_3 = a_1 + a_4$ ,

于是由  $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 则  $b_1 + tb_3 = tb_1 + t^2b_1 = 2b_3$ ,

所以  $b_3 = \frac{b_1}{2-t}$ , 代入得  $tb_1 + t^2b_1 = \frac{2b_1}{2-t}$ , 推得  $(t+t^2)(2-t) = 2$ , 所以  $t^3 - t^2 - 2t + 2 = 0$ ,

所以  $(t-1)(t^2-2) = 0$ , 有  $t > 1$ , 所以  $t = \sqrt{2}$ , 这与  $t = \frac{b_2}{b_1}$  是有理数相矛盾, 所以此情况不能;

五是  $\begin{cases} b_2b_4 = b_1b_5 \\ b_3b_4 = b_2b_5 \end{cases}$ , 可推得  $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_5}{b_4} = \frac{b_3}{b_2}$ , 令其比值为  $t$ , 则  $t > 1$ , 于是  $b_5 = tb_4, b_2 = tb_1$ ,

由  $b_1 + b_5 = b_2 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ , 则  $b_1 + tb_4 = tb_1 + b_4$ , 则  $(t-1)(b_1 - b_4) = 0$ ,

显然无解, 故此情况不可能. 所以  $|C| \neq 8$ .

综上, 所以  $|C| \geq 9$ .

**【点睛】** 关键点点睛: 本题考查集合新定义, 关键是对集合元素数的大小关系进行讨论, 推出矛盾证明第三问.

