2024北京清华附中朝阳学校高一10月月考

数　学

2024年10月

（考试时间120分钟，满分150分）

一、选择题10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合$M=\{x\,|-3<x<1\}$，$N=\{x\,|-1\le x<4\}$，则$M\cup N=$（　）

A. $\{x|-1\le x<1\}$　　B. $\{x|x>-3\}$

C. $\{x\,|-3<x<4\}$　　D. $\{x|x<4\}$

2. 已知命题$p:\forall x<-1$，$x^2>1$，则$\neg p$是（　）

A. $\exists x<-1$，$x^2\le 1$　　B. $\forall x\ge -1$，$x^2>1$　　C. $\forall x<-1$，$x^2>1$　　D. $\exists x\le -1$，$x^2\le 1$

3. 下列不等式中成立的是

A. 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

B. 若$a>b$，则$a^2>b^2$

C. 若$a<b<0$，则$a^2<ab<b^2$

D. 若$a<b<0$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

4. 关于x的方程$\left|\dfrac{x}{x-1}\right|=\dfrac{x}{x-1}$的解集为（　）

A. $\{0\}$　　B. $\{x|x\le 0$或$x>1\}$

C. $\{x|0\le x<1\}$　　D. $\{x|x\ne 1\}$

5. 已知集合$M=\{x\,|\,x^2=1\}$，$N=\{x\,|\,ax=1\}$，若$N\subseteq M$，则实数a的取值集合为（　）

A. $\{1\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{1,0\}$　　D. $\{1,-1,0\}$

6. 设$x\in R$，则“$2-x\ge 0$”是“$(x-1)^2\le 1$”的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 设$p:0<x<1$，$q:(x-a)[x-(a+2)]\le 0$，若p是q的充分不必要条件，则实数a的取值范围是（　）

A. $\{a\,|-1\le a\le 0\}$　　B. $\{a\,|-1<a<0\}$

C. $\{a\,|\,a\le 0$或$a\ge 1\}$　　D. $\{a\,|\,a<-1$或$a>0\}$

8. 对一切实数 x，不等式 $x^2+a|x|+1\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（   ）

A. $\{a|a<-2\}$　　B. $\{a|a\geq -2\}$　　C. $\{a|-2\leq a\leq 2\}$　　D. $\{a|a\geq 0\}$

9. 元旦将近，调查鲜花市场价格得知：购买 2 只玫瑰与 1 只康乃馨所需费用之和大于 8 元，而购买 4 只玫瑰与 5 只康乃馨所需费用额小于 22 元；设购买 2 只玫瑰花所需费用为 A 元，购买 3 只康乃馨所需费用为 B 元，则 A、B 的大小关系是.

A. $A>B$　　B. $A<B$　　C. $A=B$　　D. A、B 的大小关系不确定

10. 已知集合 $S=\{(x,y)|1\leq x\leq 10,1\leq y\leq 10,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$．若 $A\subseteq S$，且对任意 $(a,b)\in A$，$(c,d)\in A$，均有 $(c-a)(d-b)\geq 0$，则集合 A 中元素个数的最大值为（   ）

A. 20　　B. 19　　C. 11　　D. 10

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{1-x}$ 的定义域为______.

12. 已知 m,n 为正实数且满足 $m+2n=2$，则 $\dfrac{1}{mn}$ 的最小值是______，$\sqrt{2m}+2\sqrt{n}$ 的最大值为______.

13. 已知关于 x 的方程 $(1-m)x^2-x+4m-2=0$ 有两个实根，且一个实根小于1，一个实根大于1，请写出一个满足条件的实数 m 的值______.

14. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-6\geq 0\},B=\{x\,|\,x>c\}$，其中 $c\in\mathrm{R}$．

①集合 $\complement_{\mathrm{R}}A=$______________；

②若 $\forall x\in\mathrm{R}$，都有 $x\in A$ 或 $x\in B$，则 c 的取值范围是___________.

15. 已知曲线 $C:y=|x^2-5x-7|$，直线 $l:y=kx+b$，给出下面四个结论：

①曲线 C 关于直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 对称；

②当 $b=0$ 时，存在实数 k，使得 l 与 C 恰有一个公共点；

③对于任意的 $b>0$，存在实数 k，使得 l 与 C 恰有三个不同的公共点；

④存在实数 k,b，使得 l 与 C 共有四个不同的公共点 A,B,C,D，且 $AB=BC=CD$．

其中，正确结论的序号为______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leq 0\}$，$B=\{x|x<0\text{ 或 }x>2\}$，$C=\{x|m-2\leq x\leq m+2\}$．

（1）求 $A\cap B$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$；

（2）若 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}(C)$，求实数 m 的取值范围.

17. 已知函数 $f(x)=x^2-x+m$.

（1）当 $m=-2$ 时，求不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集；

（2）若 $m>0$ 时，$f(x)<0$ 的解集为 (a,b)，求 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值.

18. 十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作．该地区有 300 户农民，且都从事中药材种植，据了解，平均每户的年收入为 2.5 万元．为了调整产业结构，调查组和当地政府决定动员部分农民从事中药材加工，据估计，若能动员 $x\left(x>0\right)$ 户农民从事中药材加工，则剩下的继续从事中药材种植的农民平均每户的年收入有望提高 $4x\%$，而从事中药材加工的农民平均每户收入将为 $2.5\left(a-\frac{4x}{75}\right)\left(a>0\right)$ 万元.

（1）若动员 x 户农民从事中药材加工后，要使从事中药材种植的农民的总年收入不低于动员前从事中药材种植的农民的总年收入，求 x 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，要使这 300 户农民中从事中药材加工的农民的总收入始终不高于从事中药材种植的农民的总收入，求 a 的最大值.

19. 设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x=0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2+\left(a-1\right)x-a^2+1=0\right\}$．关于 x 的不等式 $x^2-\left(3m+1\right)x+2m\left(m+1\right)<0\left(m<1\right)$ 的解集为 C.

（1）若 $A\cap B=\left\{2\right\}$，求实数 a 的值；

（2）若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围；

（3）若 $A\cap C=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

20. 设函数 $f\left(x\right)=ax^2-ax+1$.

（1）若不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\varnothing$，求 a 的取值范围；

（2）当 $a\in\mathrm{R}$ 时，求关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\geq 2-x$ 的解集；

（3）对于任意的 $x\geq 1$，不等式 $f\left(x\right)\geq x+1-4a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21. 给定正整数 $n\geq 3$，设集合 $A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$．若对任意 i，$j\in\{1,2,\ldots,n\}$，a_i+a_j，a_i-a_j 两数中至少有一个属于 A，则称集合 A 具有性质 P.

（1）分别判断集合 $\left\{1,2,3\right\}$ 与 $\left\{-1,0,1,2\right\}$ 是否具有性质 P；

（2）若集合 $A=\{1,a,b\}$ 具有性质 P，求 $a+b$ 的值；

（3）若具有性质 P 的集合 B 中包含 6 个元素，且 $1\in B$，求集合 B.

参考答案

一、选择题 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】直接根据并集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $M \cup N = \{x \mid -3 < x < 4\}$.

故选：C.

2.【答案】A

【分析】根据全称量词命题的否定对命题 p 进行否定即可.

【详解】由命题 $p: \forall x < -1$，$x^2 > 1$，

则命题 p 的否定 $\neg p$ 为：$\exists x < -1$，$x^2 \le 1$，

故选：A.

3.【答案】D

【详解】试题分析：A 中当 $c = 0$ 时不成立；B 中若 $a = 0, b = -1$ 不成立；C 中 $a = -2, b = -1$ 不成立，所以 D 正确

考点：不等式性质

4.【答案】B

【分析】根据 $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{x}{x-1}$，利用绝对值的几何意义得到 $\frac{x}{x-1} \geq 0$，再利用一元二次不等式的解法求解.

【详解】因为 $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{x}{x-1}$，

所以 $\frac{x}{x-1} \geq 0$，

所以 $x \leq 0$ 或 $x > 1$，

所以方程 $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{x}{x-1}$ 的解集为 $\{x \mid x \leq 0$ 或 $x > 1\}$.

故选：B

【点睛】本题主要考查绝对值的几何意义以及一元二次不等式的解法，属于基础题.

5.【答案】D

【分析】先求出集合 $M=\{x \mid x^2=1\}=\{-1，1\}$，当 $a=0$ 时，$N=\emptyset$，成立；当 $a \neq 0$ 时，$N=\{\frac{1}{a}\}$，由 $N \subseteq M$，得 $\frac{1}{a} = -1$ 或 $\frac{1}{a} = 1$．由此能求出实数 a 的取值集合.

【详解】∵集合 $M=\{x \mid x^2=1\}=\{-1，1\}$，$N=\{x \mid ax=1\}$，$N \subseteq M$，

∴当 a=0 时，N=∅，成立；

当 a≠0 时，N={$\frac{1}{a}$}，

∵N⊆M，∴$\frac{1}{a}=-1$或$\frac{1}{a}$=1.

解得 a=﹣1 或 a=1，

综上，实数 a 的取值集合为{1，﹣1，0}.

故选 D.

【点睛】本题考查实数的取值范围的求法，考查子集、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

6.【答案】B

【分析】求不等式的解集，由充分性和必要性的定义即可做出判断.

【详解】$2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$，

$(x-1)^2\leq 1\Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$

据此可知，$2-x\geq 0$是$(x-1)^2\leq 1$的必要不充分条件.

故选：B

【点睛】本题考查了解不等式和充分必要条件的判断，考查了数学运算能力和逻辑推理能力，属于一般题目.

7.【答案】A

【分析】根据题意求出条件q的取值范围，再根据p是q的充分不必要条件列不等式组求得实数a的取值范围.

【详解】解：由$(x-a)[x-(a+2)]\leq 0$得$a\leq x\leq a+2$，

所以$p:0<x<1$，$q:a\leq x\leq a+2$，

若p是q的充分不必要条件，则$\begin{cases}a\leq 0\\a+2\geq 1\end{cases}$，解得$-1\leq a\leq 0$，

所以实数a的取值范围$\{a\,|\,-1\leq a\leq 0\}$.

故选：A.

8.【答案】B

【分析】分离常数a，结合基本不等式求得a的取值范围.

【详解】当$x=0$时，不等式$x^2+a|x|+1\geq 0$恒成立，

当$x\neq 0$时，$x^2+a|x|+1\geq 0\Rightarrow a\geq\frac{-1-x^2}{|x|}=-\frac{1}{|x|}-|x|$，

当$x>0$时，$-\frac{1}{|x|}-|x|=-\left(x+\frac{1}{x}\right)\leq -2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=-2$，当且仅当$x=1$时等号成立.

当 $x<0$ 时，$-\frac{1}{|x|}-|x|=-\left(-x+\frac{1}{-x}\right)\le -2\sqrt{-x\cdot\frac{1}{-x}}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 时等号成立.

所以 $a\ge -2$.

故选：B

9.【答案】A

【分析】设出玫瑰与康乃馨的单价，根据题意列出不等式，求出 A、B 的表达式，利用不等式的性质求解即可.

【详解】设玫瑰与康乃馨的单价分别为 x,y (单位为：元)，则有 $\begin{cases}2x+y>8\\4x+5y<22\end{cases}, 2x=A, 3y=B$.

所以有 $x=\frac{A}{2}, y=\frac{B}{3}$，因此 $\begin{cases}A+\frac{B}{3}>8(1)\\2A+\frac{5B}{3}<22(2)\end{cases}$.

$(1)\times 5+(2)\times(-1)$ 可得：$A>6$；

$(1)\times 2+(2)\times(-1)$ 可得：$B<6$，因此 $A>B$.

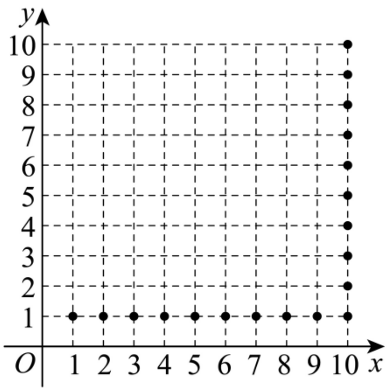
故选：A

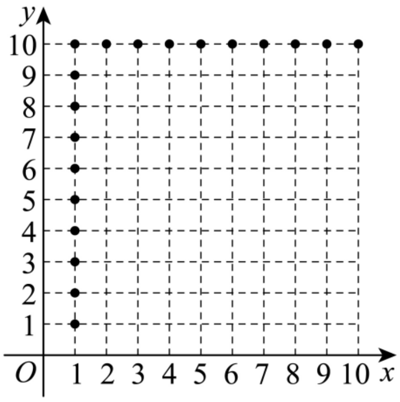
【点睛】本题考查了数学阅读能力，考查了不等式性质的应用，考查了数学建模思想，考查数学运算能力.

10.【答案】B

【分析】根据 $(c-a)(d-b)\ge 0$，转化为集合 A 中元素，也即这些元素对应的点的坐标组成的图形呈不下降趋势，集合 A 中元素个数的最大值也即在符合题意的这些点中怎样取，保证趋势不下降的同时取的点最多，.

【详解】





由题知：集合 $S=\{(x,y)|1\le x\le 10,1\le y\le 10,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$．若 $A\subseteq S$，且对任意 $(a,b)\in A$，$(c,d)\in A$，均有 $(c-a)(d-b)\ge 0$，

作如下等价转化：在符合题意的这些点中怎样取，保证趋势不下降的同时取的点最多，

因此集合 A 中元素个数最大时元素可以为：

$(1,1),(1,2),(1,3),\cdots(1,8),(1,9),(1,10),(2,10),\cdots(8,10),(9,10),(10,10)$ 共19个，

也可以是 $(1,1),(2,1),(3,1),\cdots(8,1),(9,1),(10,1),(10,2),\cdots(10,8),(10,9),(10,10)$ 共19个，（还有其他取法只要保证这些点的趋势不下降即可）．

故选：B.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11.【答案】$(-\infty,-2)\cup(-2,1]$

【分析】根据求定义域的法则求解.

【详解】要使函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{1-x}$ 有意义，

需满足 $\begin{cases}x+2\ne 0\\1-x\ge 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\ne -2\\x\le 1\end{cases}$，

则函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,1]$，

故答案为：$(-\infty,-2)\cup(-2,1]$.

12.【答案】 ①. 2 ②. $2\sqrt{2}$

【分析】利用基本不等式结合相关变式即可求解，注意等号成立的条件.

【详解】由 $m>0,n>0$，$m+2n=2$，则 $\sqrt{2mn}\le\dfrac{m+2n}{2}=1$，当且仅当 $m=1$，$n=\dfrac{1}{2}$ 取等号，

故 $\dfrac{1}{mn}\ge 2$，即 $\dfrac{1}{mn}$ 的最小值为 2；

由 $m>0,n>0$，$m+2n=2$，

则$\left(\sqrt{2m}+2\sqrt{n}\right)^2=2\left(m+2n\right)+4\sqrt{2mn}\le 4+4=8$，

所以$\sqrt{2m}+2\sqrt{n}\le 2\sqrt{2}$，

所以$\sqrt{2m}+2\sqrt{n}$的最大值为$2\sqrt{2}$，当且仅当$m=1,n=\dfrac{1}{2}$取等号.

故答案为：2；$2\sqrt{2}$.

13.【答案】2（答案不唯一）

【分析】根据二次方程根的分布知识进行求解即可得到m的取值范围，写出符合题意的一个即可.

【详解】令$f\left(x\right)=\left(1-m\right)x^2-x+4m-2$

易知有$\begin{cases}1-m>0\\ f(1)<0\end{cases}$，或$\begin{cases}1-m<0\\ f(1)>0\end{cases}$，

即：$\begin{cases}1-m>0\\ 3m-2<0\end{cases}$，或$\begin{cases}1-m<0\\ 3m-2>0\end{cases}$，

解得$m<\dfrac{2}{3}$，或$m>1$，

$\therefore m$的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，

故答案为：2（答案不唯一）.

14.【答案】 ①. $\{x\,|-2<x<3\}$ ②. $(-\infty,-2]$

【分析】先求出集合A，再利用补集的定义求出$\complement_{\mathrm{R}}A$；由题设知$A\cup B=\mathbf{R}$，从而求$c$的取值范围.

【详解】由$A=\{x\,|\,x^2-x-6\ge 0\}=\{x\,|\,x\le -2$或$x\ge 3\}$，则$\complement_{\mathrm{R}}A=\{x\,|-2<x<3\}$；

由$\forall x\in\mathrm{R}$，都有$x\in A$或$x\in B$，则$A\cup B=\mathbf{R}$，而$A=\{x\,|\,x\le -2$或$x\ge 3\}$，$B=\{x\,|\,x>c\}$，

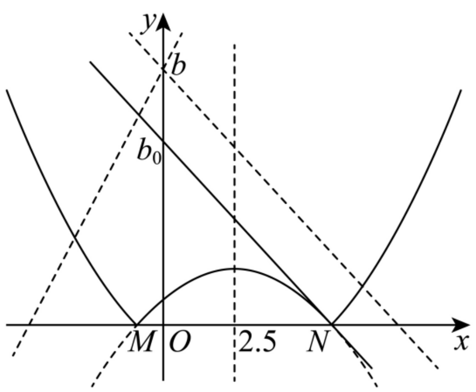
所以$c\le -2$，即c的取值范围是$(-\infty,-2]$.

故答案为：$\{x\,|-2<x<3\}$；$(-\infty,-2]$

15.【答案】①④

【分析】画出曲线C的图象，数形结合，即可判断各项内容的正确性.

【详解】函数$y=\left|x^2-5x-7\right|$的草图如下：



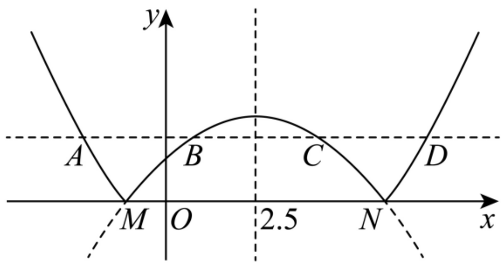
对于①，易知函数图象关于直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 对称，故①正确；

对于②，当 $b=0$ 时，可知直线 $y=kx$ 与曲线 C 必定有两个不同交点，故②不正确；

对于③，如上图所示，当 $b>0$ 时，过点 N 作抛物线 $y=-x^2+5x-7$ 的切线 BN 交 y 轴于 $B\left(0,b_0\right)$，

则当 $b>b_0$ 时，过点 $\left(0,b\right)$ 的直线与曲线 C 必有且只有两个交点（k 存在），故③错误；

对于④，如下图，设直线 l 与曲线 C 的交点距离在水平方向上等距即 $AB=BC=CD$，



则 $k=0$，设直线 $y=b$ 与 $y=\left|x^2-5x-7\right|$ 交于 $A(x_1,y_1)$、$B\left(x_3,y_3\right)$、$C\left(x_4,y_4\right)$、$D\left(x_2,y_2\right)$，

由 $x^2-5x-7=b\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1x_2=-7-b\end{cases}$；

由 $-x^2+5x+7=b\Rightarrow\begin{cases}x_3+x_4=5\\x_3x_4=b-7\end{cases}$.

当 $AB=BC=CD$ 时，

有 $\left|x_2-x_1\right|=3\left|x_4-x_3\right|\Rightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=9\left[\left(x_3+x_4\right)^2-4x_3x_4\right]$

$\Rightarrow 5^2-4\left(-7-b\right)=9\left[5^2-4\left(b-7\right)\right]\Rightarrow b=10.6$.

所以 $k=0$，$b=\dfrac{65}{12}$ 时，l 与 C 共有四个不同的公共点 A,B,C,D，且 $AB=BC=CD$，

即存在实数 k,b，使得 l 与 C 共有四个不同的公共点 A,B,C,D，且 $AB=BC=CD$，故④正确.

故答案为：①④.

【点睛】方法点睛：已知函数有零点求参数取值范围常用的方法和思路

(1)直接法：直接根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围；

(2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数值域问题加以解决；

(3)数形结合法：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图象，然后数形结合求解.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $A\cap B=\left\{x\middle|-1\le x<0 \text{或} 2<x\le 3\right\}$；$\complement_{\mathbf{R}}\left(A\cup B\right)=\varnothing$

(2) $\left\{m\middle|m<-3 \text{或} m>5\right\}$

【分析】(1) 解不等式可得集合 A，根据集合间运算的定义直接可得解；

(2) 由补集的定义可得 $\complement_{\mathbf{R}}\left(C\right)$，再根据集合间的关系列不等式，解不等式组即可.

【小问 1 详解】

由已知 $A=\left\{x\left|x^2-2x-3\le 0\right.\right\}=\left\{x\left|-1\le x\le 3\right.\right\}$，

$B=\{x|x<0$ 或$x>2\}$

则 $A\cap B=\left\{x\left|-1\le x<0\right.\text{或}\ 2<x\le 3\right\}$， $A\bigcup B=\mathbf{R}$，

则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\varnothing$；

【小问 2 详解】

由 $C=\left\{x\left|m-2\le x\le m+2\right.\right\}$，

得 $\complement_{\mathbf{R}}(C)=\left\{x\left|x<m-2\right.\text{或}\ x>m+2\right\}$，

又 $A\subseteq\complement_{\mathbf{R}}(C)$，

则 $3<m-2$ 或 $-1>m+2$，

解得 $m>5$ 或 $m<-3$，

即实数 m 的取值范围是 $\left\{m\left|m<-3\right.\text{或}\ m>5\right\}$.

17. 【答案】(1) $\{x|x<-1$ 或$x>2\}$

(2) 9

【分析】(1) 直接解一元二次不等式即可；

(2) 先由韦达定理得 $a+b=1,ab=m>0$，再由 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$ 结合基本不等式即可求解.

【小问 1 详解】

当 $m=-2$ 时， $x^2-x-2>0$，解得 $x<-1$或 $x>2$，故不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|x<-1$ 或$x>2\}$;

【小问 2 详解】

若 $f(x)<0$ 的解集为 (a,b)，则 a,b 为 $x^2-x+m=0$ 的两个根，则 $a+b=1,ab=m>0$，则

$a>0,b>0$， $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\ge 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$ 即

$a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 时取等，

故 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

18. 【答案】(1) $(0,275]$

(2) 15

【分析】(1) 先求出动员前后，从事中药材种植的农民的总年收入，列出不等关系，求出 x 的取值范围；

(2) 分别求出 300 户农民中从事中药材加工的农民的总收入和从事中药材种植的农民的总收入，结合基

本不等式可得a的最大值.

【小问 1 详解】

$(300-x)\times 2.5\times(1+4x\%)\geq 2.5\times 300$, 化简为$x^2-275x\leq 0$，

解得$0<x\leq 275$，故x的取值范围为$(0,275]$.

【小问 2 详解】

由题意得$2.5\left(a-\dfrac{4x}{75}\right)x\leq(300-x)\times 2.5\times(1+4x\%)$，

整理可得$a\leq\dfrac{300}{x}+\dfrac{x}{75}+11$，

因为$\dfrac{300}{x}+\dfrac{x}{75}\geq 2\sqrt{\dfrac{300}{x}\times\dfrac{x}{75}}=4$，当且仅当$x=150$时，取到最小值 4；

所以$a\leq 15$，即a的最大值为15.

19.【答案】（1）$a=3$

（2）$a\in\left(-\dfrac{3}{5},1\right]\cup\{-1\}$

（3）$(-\infty,-1]\cup[0,1)$

【分析】（1）由$A\cap B=\{2\}$，则$2\in B$，代入方程$x^2+(a-1)x-a^2+1=0$求出a，再检验是否符合题意即可；

（2）分$B=\varnothing$和 $B\neq\varnothing$时，①$2\in B$，②$0\in B$，进行分类讨论并验证即可；

（3）由$A\cap C=\varnothing$，利用集合的运算进行求解即可.

【小问 1 详解】

由$A=\left\{x\left|x^2-2x=0\right.\right\}=\{0,2\}$，又$A\cap B=\{2\}$，则$2\in B$，

即 2 是方程$x^2+(a-1)x-m^2+1=0$的一个实根，

则$2^2+2(a-1)-a^2+1=0$，解得$a=3$，或$a=-1$，

当$a=3$时，$B=\left\{x\left|x^2+2x-8=0\right.\right\}=\{-4,2\}$，此时$A\cap B=\{2\}$，符合题意，

当$a=-1$时，$B=\left\{x\left|x^2-2x=0\right.\right\}=\{0,2\}$，此时$A\cap B=\{0,2\}$，不符合题意，

故$a=3$.

【小问 2 详解】

由$A\cup B=A$，则$B\subseteq A$，

当$B=\varnothing$时，则方程$x^2+(a-1)x-a^2+1=0$的无实根，

即$\Delta=(a-1)^2-4(-a^2+1)<0$，解得$-\dfrac{3}{5}<a<1$，

当 $B \neq \varnothing$ 时，①$2 \in B$ 时，由（1）知，

$a=3$，$B=\{-4,2\}$，此时 $B \subsetneq A$，故 $a=3$ 不符合题意；

当 $a=-1$ 时，$B=\{0,2\}$，此时 $B \subseteq A$，故 $a=-1$ 符合题意；

②$0 \in B$ 时，则 0 是方程 $x^2+(a-1)x-a^2+1=0$ 的一个实根，

即 $-a^2+1=0$，解得 $a=\pm 1$，

当 $a=-1$ 时，已验证符合题意；

当 $a=1$ 时，$B=\{0\}$，此时 $B \subseteq A$，故 $a=1$ 符合题意；

综上 $a \in \left(-\frac{3}{5},1\right] \cup \{-1\}$.

【小问 3 详解】

由 $x^2-(3m+1)x+2m(m+1)<0\ (m<1)$，即 $(x-2m)[x-(m+1)]<0$，

又 $m<1$，则 $2m<m+1<2$，

$\therefore C=\{x \mid 2m<x<m+1\}$，

又 $A \cap C=\varnothing$，则 $m+1 \leq 0$，或 $\begin{cases} 2m \geq 0 \\ m+1<2 \end{cases}$，

解得 $m \leq -1$，或 $0 \leq m<1$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1] \cup [0,1)$.

20.【答案】(1) $[0,4]$

（2）答案见解析　（3）$a \geq \frac{1}{3}$

【分析】(1) 根据不等式解的情况判断对应方程解的情况，利用判别式列不等式，解不等式可得参数范围；

（2）分情况讨论不等式所对应方程的解，进而确定不等式的解集情况；

（3）分离参数可得 $a \geq \dfrac{1}{x+\frac{4}{x}-1}$，结合基本不等式求最值可得参数范围.

【小问 1 详解】

当 $a=0$ 时，$f(x)=1$，此时 $f(x)<0$ 的解集为 $\varnothing$，成立；

当 $a \neq 0$ 时，不等式 $f(x)=ax^2-ax+1<0$ 的解集为 $\varnothing$，

则 $\begin{cases} a>0 \\ (-a)^2-4a \leq 0 \end{cases}$，解得 $0<a \leq 4$，

综上所述 $0 \leq a \leq 1$，即 $a \in [0,4]$；

【小问 2 详解】

$f\left(x\right)\geq 2-x$，即为$ax^2+\left(1-a\right)x-1\geq 0$，

当$a=0$时，$x-1\geq 0$，解得$x\geq 1$，即$x\in\left[1,+\infty\right)$；

当$a\neq 0$时，$ax^2+\left(1-a\right)x-1\geq 0$即为$a\left(x-1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\geq 0$，

对应方程$a\left(x-1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)=0$的解为$x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{a}$，

当$a>0$时，不等式为$\left(x-1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\geq 0$，且$x_1>x_2$，不等式的解集为$x\leq -\dfrac{1}{a}$或$x\geq 1$，即

$x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$；

当$-1<a<0$时，不等式为$\left(x-1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\leq 0$，且$x_1<x_2$，不等式的解集为$1\leq x\leq -\dfrac{1}{a}$，即

$x\in\left[1,-\dfrac{1}{a}\right]$；

当$a=-1$时，$x_1=x_2$，不等式为$\left(x-1\right)^2\leq 0$，解得$x=1$，即$x\in\left\{1\right\}$；

当$a<-1$时，不等式为$\left(x-1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\leq 0$，且$x_2<x_1$，不等式的解集为$-\dfrac{1}{a}\leq x\leq 1$，即$x\in\left[-\dfrac{1}{a},1\right]$，

综上所述：

当$a=0$时，不等式的解集为$\left[1,+\infty\right)$；

当$a>0$时，不等式的解集为$x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{a}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$；

当$-1<a<0$时，不等式的解集为$\left[1,-\dfrac{1}{a}\right]$；

当$a=-1$时，不等式的解集为$\left\{1\right\}$；

当$a<-1$时，不等式的解集为$\left[-\dfrac{1}{a},1\right]$；

【小问 3 详解】

由已知对任意的$x\geq 1$，不等式$f\left(x\right)\geq x+1-4a$恒成立，

即$ax^2-ax+1\geq x+1-4a$恒成立，即$a\left(x^2-x+4\right)\geq x$，

又$x\geq 1$是，$x^2-x+4>0$恒成立，

则$a\geq \dfrac{x}{x^2-x+4}=\dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}-1}$，

又 $x+\dfrac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，则 $\dfrac{1}{x+\dfrac{4}{x}-1}\leq\dfrac{1}{3}$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立，

综上所述 $a\geq\dfrac{1}{3}$.

21.【答案】（1）集合 $\{1,2,3\}$ 不具有性质 P，集合 $\{-1,0,1,2\}$ 具有性质 P

（2）-1

（3） $\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$\left\{-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right\}$ ， $\left\{-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},1\right\}$ ， $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ 或 $\left\{-\dfrac{3}{2},-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1\right\}$

【分析】（1）根据性质 P 的定义，即可判断两个集合是否满足；

（2）根据性质 P 的定义，首先确定 $0\in\{1,a,b\}$，再讨论 $1+b$ 是否属于集合 $\{1,0,b\}$，即可确定 b 的取值，即可求解；

（3）首先确定集合 B 中有 0，并且有正数和负数，然后根据性质 P 讨论集合中元素的关系，即可求解.

【小问 1 详解】

集合 $\{1,2,3\}$ 中的 $3+3=6\notin\{1,2,3\}$， $3-3=0\notin\{1,2,3\}$，

所以集合 $\{1,2,3\}$ 不具有性质 P，

集合 $\{-1,0,1,2\}$ 中的任何两个相同或不同的元素，相加或相减，两数中至少有一个属于集合 $\{-1,0,1,2\}$，

所以集合 $\{-1,0,1,2\}$ 具有性质 P；

【小问 2 详解】

若集合 $A=\{1,a,b\}$ 具有性质 P，记 $m=\max\{1,a,b\}$，则 $m\geq 1$，

令 $a_i=a_j=m$，则 $2m\notin\{1,a,b\}$，从而必有 $0\in\{1,a,b\}$，

不妨设 $a=0$，则 $A=\{1,0,b\}$， $b\neq 0$ 且 $b\neq 1$，

令 $a_i=1$， $a_j=b$，则 $\{1+b,1-b\}\cap\{1,0,b\}\neq\varnothing$，且 $\{1+b,b-1\}\cap\{1,0,b\}\neq\varnothing$， $b\neq 0$ 且 $b\neq 1$，

以下分类讨论：

1）当 $1+b\in\{1,0,b\}$ 时，若 $1+b=0\Rightarrow b=-1$，此时， $A=\{1,0,-1\}$ 满足性质 P；

若 $1+b=1\Rightarrow b=0$，舍；若 $1+b=b$，无解；

2）当 $1+b\notin\{1,0,b\}$ 时，则 $\{1-b,b-1\}\subseteq\{1,0,b\}$，注意 $b\neq 0$ 且 $b\neq 1$，可知 b 无解；

经检验 $A=\{1,0,-1\}$ 符合题意，

综上 $a+b=-1$；

【小问 3 详解】

首先容易知道集合 B 中有 0，有正数也有负数，

不妨设 $B=\{-b_k,-b_{k-1},\dots,-b_1,0,a_1,a_2,\dots,a_l\}$，其中 $k+l=5$，$0<a_1<\dots<a_l,0<b_1<\dots<b_k$，

根据题意 $\{a_1-a_l,\dots,a_{l-1}-a_l\}\subseteq\{-b_k,-b_{k-1},\dots,-b_1\}$，

且 $\{b_k-b_1,b_{k-1}-b_1,\dots,b_2-b_1\}\subseteq\{a_1,a_2,\dots a_l\}$，从而 $(k,l)=(2,3)$ 或 $(3,2)$，

1）当 $(k,l)=(3,2)$ 时，$\{b_3-b_1,b_3-b_2\}=\{a_1,a_2\}$，

并且 $\{-b_3+b_1,-b_3+b_2\}=\{-b_1,-b_2\}\Rightarrow b_3=b_1+b_2$，$a_2-a_1\in\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_2=2a_1$，

由上可得 $(b_2,b_1)=(b_3-b_1,b_3-b_2)=(a_2,a_1)=(2a_1,a_1)$，并且 $b_3=b_1+b_2=3a_1$，

综上可知 $B=\{-3a_1,-2a_1,-a_1,0,a_1,2a_1\}$；

2）当 $(k,l)=(2,3)$ 时，同理可得 $B=\{-2a_1,-a_1,0,a_1,2a_1,3a_1\}$，

据此，当 B 中有包含 6 个元素，且 $1\in B$ 时，符合条件的集合 B 有 5 个，

分别是 $\{-2,-1,0,1,2,3\}$, $\left\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right\}$，$\left\{-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}$，$\{-3,-2,-1,0,1,2\}$ 或 $\left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right\}$.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是确定满足性质 P 的集合里面有 0，再对其他元素进行讨论.