2024 北京五中分校初二 10 月月考

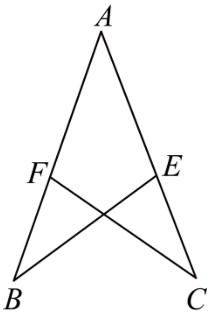
数　　学

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1. 下面由冬季奥运会比赛项目图标组成的四个图形中，可以看作轴对称图形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

2. 如图，若$\triangle ABE\cong\triangle ACF$，且$AB=5$，$AE=3$，则$BF$的长为（　）



A. 3　　B. 2　　C. 5　　D. 2.5

3. 下列运算结果正确的是（　）

A. $\left(a^2\right)^3=a^6$　　B. $a^3\cdot a^4=a^{12}$　　C. $a^8\div a^2=a^4$　　D. $(ab)^n=ab^n$

4. 点$M(1,2)$关于y轴对称点的坐标为（　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(1,-2)$　　D. $(2,-1)$

5. 已知一个等腰三角形两边长分别为 3，7，那么它的周长是（　　）

A. 17　　B. 13　　C. 13 或 17　　D. 10 或 13

6. 下列各式中，从左到右的变形是因式分解的是（　）

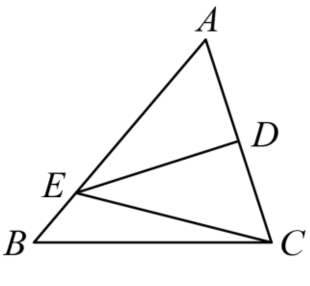
A. $a^2c-a^2b-4=a^2(c-b)-4$　　B. $a(x+y)=ax+ay$

C. $(x+3y)(x-3y)=x^2-9y^2$　　D. $9a^2+6ab+b^2=(3a+b)^2$

7. 一个多边形内角和是 1080°，则这个多边形是（ ）

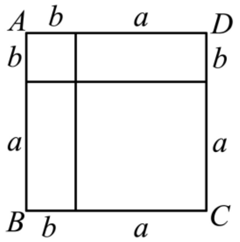
A. 六边形　　B. 七边形　　C. 八边形　　D. 九边形

8. 如图，DE是△ABC中AC边的垂直平分线，若BC=8，AB=10，则△EBC的周长是(　　)



A. 13　　　　　B. 16　　　　　C. 18　　　　　D. 20

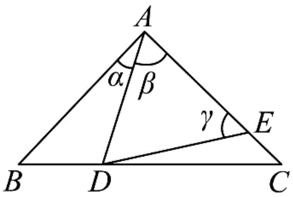
9. 如图，根据计算正方形 $ABCD$ 的面积，可以说明下列哪个等式成立（　　）



A. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　　　B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　　　D. $a(a-b)=a^2-ab$

10. 如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 AC 上的点，若 $AB=AC$ ， $AD=AE$ ，则（　）



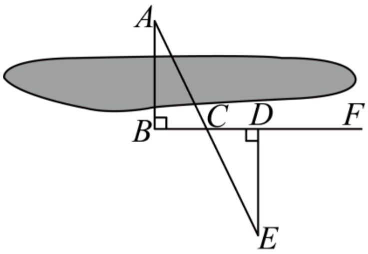
A. 当 β 为定值时， $\angle CDE$ 为定值　　　　B. 当 α 为定值时， $\angle CDE$ 为定值

C. 当 γ 为定值时， $\angle CDE$ 为定值　　　　D. 无法确定

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

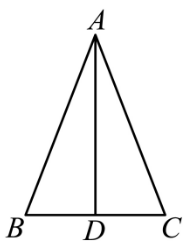
11. 要使分式 $\dfrac{2}{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围为________.

12. 如图，要测量池塘两岸相对的两点 A，B 的距离，可以在池塘外取 AB 的垂线 BF 上的两点 C，D，使 $BC=CD$ ，再画出 BF 的垂线 DE ，使 E 与 A，C 在一条直线上．若想知道两点 A，B 的距离，只需要测量出线段______的长即可，做出这一判断的理由是______.

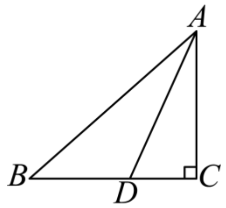


13. 若 $2a-b=0$，且 $b\neq 0$，则分式 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 的值为______.

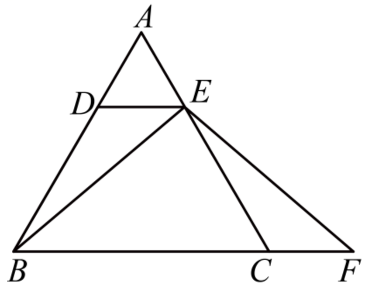
14. 在△ABC 中，AB=AC，点 D 在 BC 上（不与点 B，C 重合）．只需添加一个条件即可证明△ABD≌△ACD，这个条件可以是________（写出一个即可）



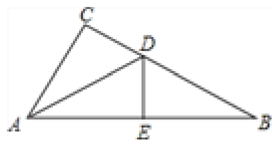
15. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，AD是$\triangle ABC$的角平分线，$BC=5\text{cm}$，$BD:DC=3:2$，则点D到AB的距离为______cm．



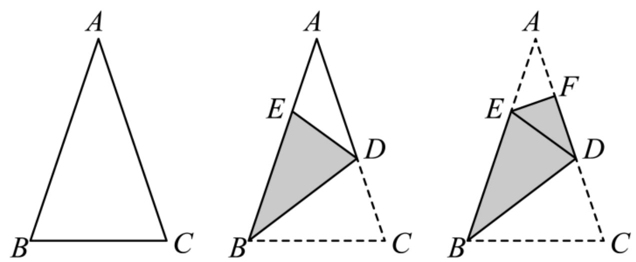
16. 如图，在等边三角形ABC中，$DE\parallel BC$，$EB=EF$．若$BD=4$，$BF=8$，则线段DE的长为______．



17. 如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，AD平分$\angle CAB$交BC于D，$DE\perp AB$于E．若$DE=1cm$，则$BC=$________cm．



18. 已知一张三角形纸片ABC（如图①），其中$AB=AC$．将纸片沿过点B的直线折叠，使点C落到AB边上的点E处，折痕为BD，点D在边AC上（如图②）．再将纸片沿过点E的直线折叠，点A恰好与点D重合，折痕为EF（如图③）．原三角形纸片ABC中，$\angle ABC$的大小为______°．



① ② ③

三、解答题（本题共54分，19-21题每题6分，22-23题每题4分，24题5分，25题4分，26-27题每题6分，28题7分）

19. 计算：

（1）$(x-3)(x+3)$；

（2）$a\bullet a^3-\left(a^2\right)^2+2a^6\div a^2$

20. 分解因式：

（1）x^3-4x；

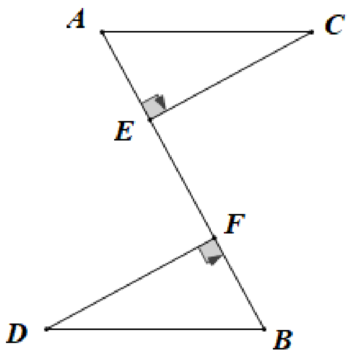
（2）$2ax^2-12ax+18a$．

21. 计算：

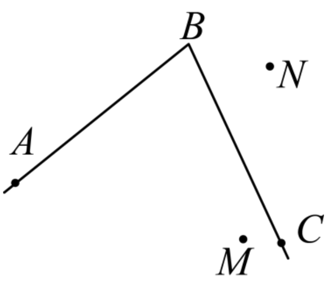
（1）$\dfrac{2a}{a+4}\cdot\dfrac{a^2+8a+16}{4a^2}$；

（2）$\left(x^2-2x\right)\div\dfrac{x-2}{2x}$．

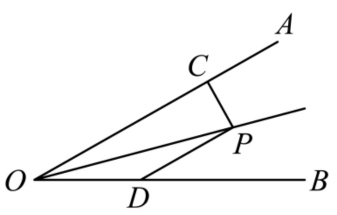
22. 如图，两车从路段 AB 的两端同时出发，沿平行路线以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地，C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？



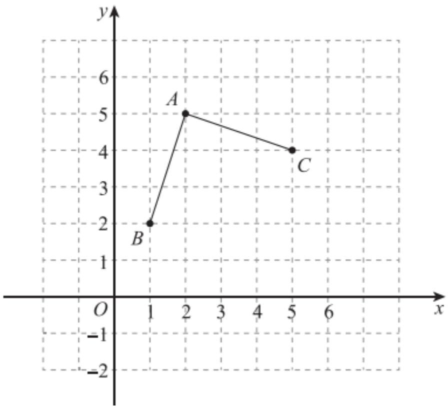
23. 已知：如图 $\angle ABC$ 及两点 M、N．求作：点 P，使得 $PM=PN$，且 P 点到 $\angle ABC$ 两边的距离相等．（保留作图痕迹，不写作法）



24. 如图，点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，$PC\perp OA$ 于点 C，$\angle AOB=30^\circ$，点 D 在边 OB 上，且 $OD=DP=2$．求线段 CP 的长．



25. 在平面直角坐标系 xOy 中，横，纵坐标都是整数的点叫做整点，如图，点 A，B，C 的坐标分别为 $(2,5)$，$(1,2)$，$(5,4)$，$AB=AC$．



（1）$\angle BAC=$__________°；

（2）若点 D 为整点，且满足 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，直接写出点 D 的坐标(写出两个即可).

26. 阅读下列材料：

利用完全平方公式，可以把多项式 x^2+bx+c 变形为 $\left(x+m\right)^2+n$ 的形式．例如，

$x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=\left(x-2\right)^2-1$．

观察上式可以发现，当 $x-2$ 取任意一对互为相反数的值时，多项式 x^2-4x+3 的值是相等的．例如，当 $x-2=\pm1$，即 $x=3$ 或 1 时，x^2-4x+3 的值均为 0；当 $x-2=\pm2$，即 $x=4$ 或 0 时，x^2-4x+3 的值均为 3．

我们给出如下定义：

对于关于 x 的多项式，若当 $x+m$ 取任意一对互为相反数的值时，该多项式的值相等，则称该多项式关于 $x=-m$ 对称，称 $x=-m$ 是它的对称轴．例如，x^2-4x+3 关于 $x=2$ 对称，$x=2$ 是它的对称轴．

请根据上述材料解决下列问题：

（1）将多项式 x^2-6x+5 变形为 $\left(x+m\right)^2+n$ 的形式，并求出它的对称轴；

（2）若关于 x 的多项式 $x^2+2ax-1$ 关于 $x=-4$ 对称，则 $a=$___；

（3）代数式 $\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-8x+16\right)$ 的对称轴是 $x=$___．

27. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 是 BC 边上的一个动点（点 D 不与点 B，C 重合），连接 AD，作等腰 $\triangle ADE$，使 $AD=AE$，$\angle DAE=\angle BAC$，点 D，E 在直线 AC 两旁，连接 CE.

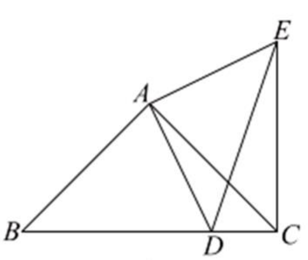


图 1

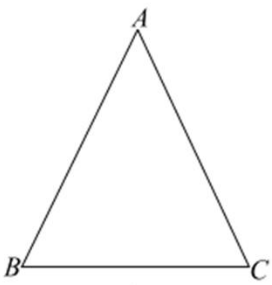


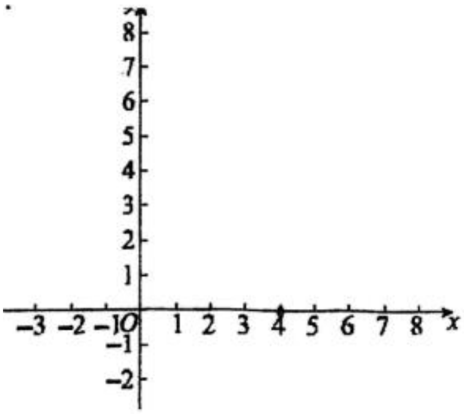
图 2

（1）如图 1，当 $\angle BAC=90°$ 时，直接写出 BC 与 CE 的位置关系；

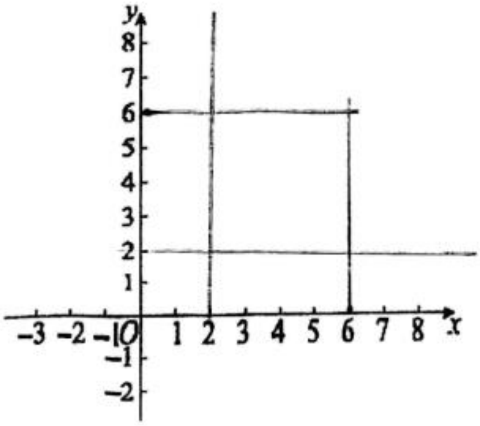
（2）如图 2，当 $0°<\angle BAC<90°$ 时，过点 A 作 $AF\perp CE$ 于点 F，请你在图 2 中补全图形，用等式表示

线段 BD，CD，$2EF$ 之间的数量关系，并证明．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P 和正方形 $OABC$，给出如下定义：若点 P 到正方形 $OABC$ 的边所在直线的最大距离是最小距离的 k 倍，则称点 P 是正方形 $OABC$ 的“k 倍距离点”．已知：点 $A\left(a,0\right)$，$B\left(a,a\right)$．



备用图 1



备用图 2

（1）当 $a=4$ 时，

①点 C 的坐标是___；

②在 $P_1\left(1,1\right)$，$P_2\left(2,2\right)$，$P_3\left(-2,2\right)$ 三个点中，___是正方形 $OABC$ 的“3 倍距离点”；

（2）当 $a=6$ 时，点 $P\left(2,n\right)$（其中 $n>0$）是正方形 $OABC$ 的“2 倍距离点”，求 n 的取值范围；

（3）点 $M\left(2,2\right)$，$N\left(3,3\right)$．线段 MN 上存在正方形 $OABC$ 的“2 倍距离点”，直接写出 a 的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1. 【答案】D

【分析】本题考查轴对称图形的识别．根据能否找到一条直线使图形折叠后能够完全重合，进行判断即可，掌握轴对称图形的定义，是解题的关键．

【详解】解：A 、不是轴对称图形，故本选项错误；

B 、不是轴对称图形，故本选项错误；

C 、不是轴对称图形，故本选项错误；

D 、是轴对称图形，故本选项正确．

故选：D．

2. 【答案】B

【分析】根据 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 得 $AE = AF$ ，结合 $BF = AB - AF$ ，解答即可．

本题考查了三角形全等的性质，熟练掌握性质是解题的关键．

【详解】解：$\because \triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，

$\therefore AE = AF$ ，

$\because BF = AB - AF$ ， $AB = 5$ ， $AE = 3$ ，

$\therefore BF = 5 - 3 = 2$ ．

故选：B．

3. 【答案】A

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算，同底数幂乘除法计算，积的乘方计算，熟知相关计算法则是解题的关键．

【详解】解：A．$\left(a^2\right)^3 = a^6$，原式计算正确，符合题意；

B． $a^3 \cdot a^4 = a^7$，原式计算错误，不符合题意；

C． $a^8 \div a^2 = a^6$，原式计算错误，不符合题意；

D． $(ab)^n = a^n b^n$，原式计算错误，不符合题意；

故选：A．

4. 【答案】A

【分析】根据关于 y 轴对称，横坐标互为相反数，纵坐标相同确定即可．

【详解】解：点 $M(1,2)$ 关于 y 轴对称点的坐标为 $(-1,2)$ ．

故选：A．

【点睛】本题考查了轴对称与坐标变化，熟练掌握对称点的坐标变化特点是解题的关键．关于 x 轴对称的两个点的坐标，横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的两个点的坐标，横坐标互为相反数，纵坐标相同．

5.【答案】A

【分析】本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系；题目从边的方面考查三角形，涉及分类讨论的思想方法．求三角形的周长，不能盲目地将三边长相加起来，而应养成检验三边长能否组成三角形的好习惯，把不符合题意的舍去．

求等腰三角形的周长，即是确定等腰三角形的腰与底的长求周长；题目给出等腰三角形有两条边长为 3 和 7，而没有明确腰、底分别是多少，所以要进行讨论，还要应用三角形的三边关系验证能否组成三角形．

【详解】解：（1）若 3 为腰长，7 为底边长，由于$3+3<7$，则三角形不存在；

（2）若 7 为腰长，则符合三角形的两边之和大于第三边．

所以这个三角形的周长为$7+7+3=17$．

故选 A．

6.【答案】D

【分析】根据把多项式写成几个因式的积的形式叫做因式分解，判断即可．

本题考查了因式分解的定义即把多项式写成几个因式的积的形式，正确理解定义是解题的关键．

【详解】解：$\because a^2c-a^2b-4=a^2\left(c-b\right)-4$不是因式分解，

∴A 不合题意；

$\because a\left(x+y\right)=ax+ay$ 不是因式分解，

∴B 不合题意；

$\because \left(x+3y\right)\left(x-3y\right)=x^2-9y^2$不是因式分解，

∴C 不合题意；

$\because 9a^2+6ab+b^2=\left(3a+b\right)^2$是因式分解，

∴D 符合题意；

故选 D．

7.【答案】C

【分析】本题考查根据多边形的内角和公式计算多边形的边数．利用多边形的内角和公式$\left(n-2\right)\times180°$，列出方程求解即可．

【详解】解：设所求多边形的边数为n，

$\therefore \left(n-2\right)\times180°=1080°$，

解得：$n=8$，

故选：C．

8.【答案】C

【分析】根据线段的垂直平分线的性质得到 $EA=EC$，根据三角形的周长公式计算即可．

【详解】∵DE是△ABC中AC边的垂直平分线，∴$EA=EC$，∴△EBC的周长＝$BC+BE+EC$＝$BC+BE+EA$＝$BC+BA$＝18．

故选 C．

【点睛】本题考查了线段的垂直平分线的性质，掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键．

9. 【答案】B

【详解】分析：根据正方形 $ABCD$ 的面积=边长为 a 的正方形的面积+两个长为 a,宽为 b 的长方形的面积+边长为 b 的正方形的面积,即可解答.

详解：据题意得:（a+b）^{2}=a^2+2ab+b^2.

故选 B.

点睛：本题主要考查了完全平方公式的几何背景,解题的关键是通过几何图形之间的数量关系对公式做出几何解释.

10. 【答案】B

【分析】根据 $AB=AC$ 得到 $\angle B=\angle C$，根据 $AD=AE$ 得 $\angle ADE=\angle\gamma$，利用三角形外角性质，解答即可．

本题考查了等腰三角形的性质，三角形外角性质，熟练掌握这两个性质是解题的关键．

【详解】解：$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

$\because AD=AE$，

$\therefore \angle ADE=\angle\gamma$，

$\because \angle CDE+\angle C=\angle\gamma$，

$\therefore \angle CDE=\angle\gamma-\angle C$，

$\because \angle\alpha+\angle B=\angle ADC$，

$\therefore \angle\alpha+\angle C=\angle ADE+\angle CDE$，

$\therefore \angle\alpha+\angle C=\angle\gamma+\angle CDE$，

$\therefore \angle\alpha=\angle\gamma-\angle C+\angle CDE$，

$\therefore \angle\alpha=2\angle CDE$，

$\therefore$当 α 为定值时，$\angle CDE$ 为定值，

故选：B．

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

11. 【答案】$x\neq 3$

【分析】根据分母不等于 0 列式求解即可．

【详解】根据题意有：$x-3\neq 0$，

解得：$x\neq 3$，

故答案为：$x\neq 3$．

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，掌握分式有意义的条件是解题的关键．

12.【答案】 ①. ED ## DE ②. ASA ##角边角

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，根据题意可利用 ASA 证明$\triangle ABC\cong\triangle EDC$得到$AB=ED$，据此可得答案.

【详解】解：由题意得，$\angle ABC=\angle EDC=90^{\circ}$，

又$\because BC=DC$，$\angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle EDC(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AB=ED$，

∴知道两点 A，B 的距离，只需要测量出线段 ED 的长即可，作出这一判断的理由是 ASA，

故答案为：ED； ASA .

13.【答案】-3

【分析】由已知 2a−b＝0，可知 b＝2a；将所得结果代入所求的式子中，经过约分、化简即可得到所求的值.

【详解】解：∵2a−b＝0，∴b＝2a；

$$\therefore\frac{a+b}{a-b}=\frac{a+2a}{a-2a}=\frac{3a}{-a}=-3.$$

故答案为−3.

【点睛】正确对式子进行变形，化简求值是解决本题的关键．在解题过程中要注意思考已知条件的作用.

14.【答案】∠BAD=∠CAD（或 BD=CD）

【分析】证明△ABD≌△ACD，已经具备$AB=AC,AD=AD,$根据选择的判定三角形全等的判定方法可得答案.

【详解】解：$\because AB=AC,AD=AD,$

$\therefore$ 要使$\triangle ABD\cong\triangle ACD,$

则可以添加：∠BAD=∠CAD,

此时利用边角边判定：$\triangle ABD\cong\triangle ACD,$

或可以添加：$BD=CD,$

此时利用边边边判定：$\triangle ABD\cong\triangle ACD,$

故答案为：∠BAD=∠CAD 或（$BD=CD.$）

【点睛】本题考查的是三角形全等的判定，属开放性题，掌握三角形全等的判定是解题的关键.

15.【答案】2

【分析】本题主要考查了角平分线的性质，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于 H，先根据线段之间的关系求出$CD=2\mathrm{cm}$，再由角平分线上的点到角两边的距离相等得到$DH=CD=2\mathrm{cm}$，据此可得答案.

【详解】解：如图所示，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于 H，

$\because BC=5\mathrm{cm}$，$BD:DC=3:2$，

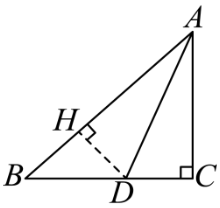
$\therefore CD=2\mathrm{cm}$，

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\angle ACB=90^\circ$， $DH\perp AB$，

∴ $DH=CD=2\text{cm}$，

∴点 D 到 AB 的距离为 2cm，

故答案为：2.

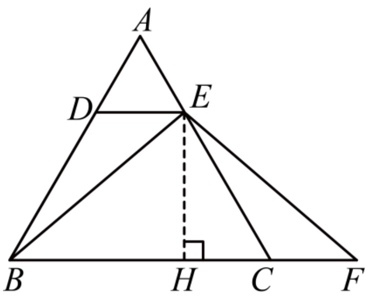


16. 【答案】2

【分析】过点 E 作 $EH\perp BC$ 于点 H，根据 $\triangle ABC$ 是等边三角形， $DE\parallel BC$，得到 $\triangle ADE$ 是等边三角形，已知 $EB=EF$，得到 $BH=FH=\dfrac{1}{2}BF=4$，结合 $BD=4$，得到 $EC=BD=4$，在 $\triangle EHC$ 中，求得 $HC=\dfrac{1}{2}EC=2$，表示出 $BC=BH+HC=6$，根据 $AC=BC=6=EC+EA=4+AE$ 即可求得线段 $AE=2$ 的长，继而得到 DE 的长.

本题主要考查等边三角形的判定和性质，等腰三角形的性质与判定，含有 30° 角的直角三角形的性质，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

【详解】解：过点 E 作 $EH\perp BC$ 于点 H，



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=\angle A=60^\circ$， $AB=BC=CA$，

∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\angle ADE=\angle AED=\angle ABC=\angle ACB=\angle A=60^\circ$，

∴ $\triangle ADE$ 是等边三角形，

∴ $DE=AE=AD$，

∴ $AC-AE=AB-AD$，

∴ $CE=BD$，

∵ $BD=4$，

∴ $CE=4$，

∵ $EB=EF$， $EH\perp BC$， $BF=8$，

$\therefore BH = FH = \dfrac{1}{2}BF = 4$， $\angle HEC = 30^\circ$，

$\therefore HC = \dfrac{1}{2}EC = 2$，

$\therefore BC = BH + HC = 6$，

$\therefore AC = BC = 6 = EC + EA = 4 + AE$，

$\therefore AE = 2$，

$\therefore DE = 2$．

故答案为：2．

17. 【答案】3

【详解】∵AD 平分∠CAB，∠C=90°，DE⊥AB，

∴CD=DE=1cm，

∵∠B=30°，

∴BD=2DE=2cm，

∴BC=1+2=3cm，

故答案是：3cm．

18. 【答案】72

【分析】根据翻折不变性可知$\angle A = \angle EDA$， $\angle C = \angle BED = \angle A + \angle EDA$，利用三角形内角和定理构建方程即可解答．

【详解】设$\angle A = x$，根据翻折不变性可知$\angle A = \angle EDA = x$， $\angle C = \angle BED = \angle A + \angle EDA = 2x$，

$\because AB = AC$，

$\therefore \angle ABC = \angle C = 2x$，

$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$，

$\therefore 5x = 180^\circ$，

$\therefore x = 72^\circ$，

即$\angle ABC = 72^\circ$，

故答案为 72．

【点睛】本题考查了翻折变换、等腰三角形的性质等知识，解题的关键是学会转化角的关系并用方程的思想思考问题．

三、解答题（本题共 54 分，19-21 题每题 6 分，22-23 题每题 4 分，24 题 5 分，25 题 4 分，26-27 题每题 6 分，28 题 7 分）

19. 【答案】（1） $x^2 - 9$

（2） $2a^4$

【分析】（1）根据平方差公式计算即可；

（2）根据单项式乘以单项式，幂的乘方，单项式除以单项式法则解答即可．

本题考查了整式的乘除，熟练掌握公式，运算法则是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：$(x-3)(x+3)$

$=x^2-9$.

【小问 2 详解】

解：$a\cdot a^3-(a^2)^2+2a^6\div a^2$

$=a^4-a^4+2a^4$

$=2a^4$.

20. 【答案】（1）$x(x+2)(x-2)$

（2）$2a(x-3)^2$

【分析】本题主要考查了分解因式：

（1）先提取公因式 x，再利用平方差公式分解因式即可；

（2）先提取公因式$2a$，再利用完全平方公式分解因式即可.

【小问 1 详解】

解：x^3-4x

$=x(x^2-4)$

$=x(x+2)(x-2)$；

【小问 2 详解】

解：$2ax^2-12ax+18a$

$=2a(x^2-6x+9)$

$=2a(x-3)^2$.

21. 【答案】（1）$\dfrac{a+4}{2a}$

（2）$2x^2$

【分析】（1）根据分式的乘法计算即可；

（2）根据分式的除法法则计算即可.

本题考查了分式的乘法，除法，熟练掌握运算法则是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：$\dfrac{2a}{a+4}\cdot\dfrac{a^2+8a+16}{4a^2}$

$=\dfrac{2a}{a+4}\cdot\dfrac{(a+4)^2}{4a^2}$

$=\dfrac{a+4}{2a}$.

【小问 2 详解】

解：$\left(x^2-2x\right)\div\dfrac{x-2}{2x}$

$=x\left(x-2\right)\times\dfrac{2x}{x-2}$

$=2x^2$.

22. 【答案】相等，理由见解析.

【分析】要判断 C，D 两地到路段 AB 的距离是否相等，可以由条件证明$\triangle AEC\cong\triangle BFD$，再根据全等三角形的性质就可以的得出结论.

【详解】解：C，D 两地到路段 AB 的距离相等.

证明：由题意知 $AC=BD$，

$\because CE\perp AB$，$DF\perp AB$，

$\therefore \angle BFD=\angle AEC=90°$.

$\because AC\parallel BD$，

$\therefore \angle A=\angle B$.

在$\triangle AEC$ 和$\triangle BFD$ 中.

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle AEC\\ \angle A=\angle B\\ AC=BD\end{cases},$$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BFD$，

$\therefore CE=DF$.

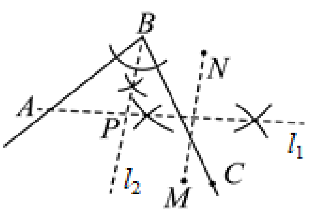
$\therefore C$，D 两地到路段 AB 的距离相等.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定及性质的运用，点到直线的距离的理解，在解答时弄清判断三角形全等的条件是关键.

23. 【答案】见解析

【分析】角平分线上的点到两边的距离相等，垂直平分线上的点到两端的距离相等，即点 P 是$\angle ABC$ 的平分线与线段 MN 的中垂线的交点.

【详解】如图，连接 MN，作线段 MN 的中垂线 l_1，作$\angle ABC$ 的平分线 l_2，两条线的交点为点 P.



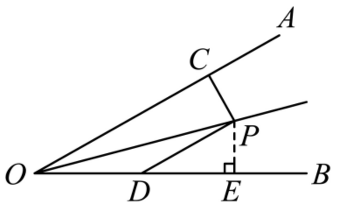
点 P 即为所求.

【点睛】本题考查了尺规作图（角平分线的作法、线段垂直平分线的作法），角平分线的性质定理和垂直平分线的性质的应用，掌握角平分线的性质定理是解答本题的关键.

24. 【答案】$CP=1$

【分析】过点 P 作 $PE\perp OB$ 于 E，根据角平分线的定义，得出 $\angle AOP=\angle POB=15^\circ$，再根据等边对等角，得出 $\angle OPD=\angle POB=15^\circ$，再根据三角形的外角的性质，得出 $\angle PDE=30^\circ$，再根据含30度角的直角三角形的性质，得出 $PE=\dfrac{1}{2}PD=1$，再根据角平分线的性质，即可得出答案.

【详解】解：如图，过点 P 作 $PE\perp OB$ 于 E，



$\because \angle AOB=30^\circ$，点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，

$\therefore \angle AOP=\angle POB=15^\circ$，

$\because OD=DP=2$，

$\therefore \angle OPD=\angle POB=15^\circ$，

$\therefore \angle PDE=30^\circ$，

$\therefore PE=\dfrac{1}{2}PD=1$，

$\because OP$ 平分 $\angle AOB$，$PC\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore CP=PE=1$.

【点睛】本题考查了角平分线的定义、等边对等角、三角形的外角的性质、含30度角的直角三角形的性质、角平分线的性质，解本题的关键在熟练掌握相关的性质定理.

25. 【答案】（1）90°

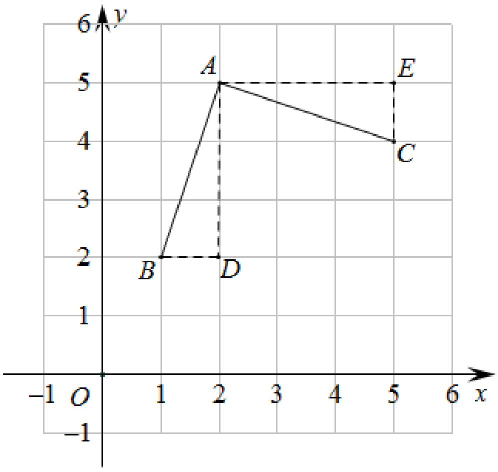
（2）点 D 的坐标为 $(3,3)$ 或 $(4,1)$

【分析】（1）如图所示（见详解），构造直角三角形 ABD，直角三角形 ACE，证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE(\mathrm{SSS})$，且 $\angle DAC+\angle CAE=90^\circ$，$\angle BAD=\angle CAE$，由此即可求解；

（2）连接 BC，过点 A 作 BC 的垂直平分线 AM，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图所示，



过点A，B 作 $AD\perp BD$，垂足为点 D，过点A，C 作 $AE\perp CE$，垂足为点 E，

∵点 $A(2,5)$，$B(1,2)$，$C(5,4)$，$AB=AC$，

∴ $BD=CE$，$AD=AE$，

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE(\text{SSS})$，

∴ $\angle BAD=\angle CAE$，

∵ $\angle DAC+\angle CAE=90^\circ$，且 $\angle DAC+\angle BAD=\angle BAC$，

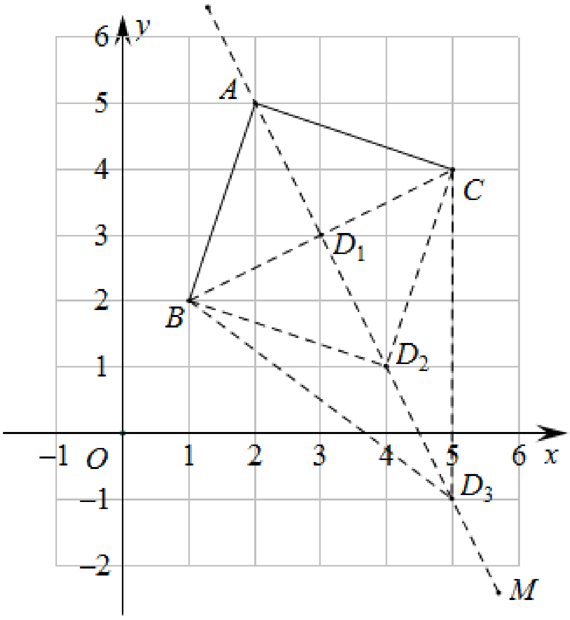
∴ $\angle DAC+\angle BAD=90^\circ$，

∴ $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=90^\circ$．

故答案为：90°．

【小问2详解】

解：如图所示，连接 BC，过点A作 $AM\perp BC$，且 AM 平分 BC，即 AM 是 BC 的垂直平分线，



根据作图可知，$AB=AC$，$BD_1=CD_1$，AD_1 为公共边，

∴ $\triangle ABD_1\cong\triangle ACD_1(\text{SSS})$，

$\therefore D_1$ 即为所求点 D，坐标为 $(3,3)$，

同理可证：$\triangle ABD_2 \cong \triangle ACD_2(\text{SSS})$，

$\therefore D_2$ 即为所求点 D，坐标为 $(4,1)$.

$\therefore$ 点 D 为整点，且满足 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，点 D 的坐标为 $(3,3)$ 或 $(4,1)$.

【点睛】本题主要考查平面直角系中点的变换，图形的变换，三角形全等的判断和证明，掌握点的变换规律，三角形全等的证明是解题的关键.

26. 【答案】（1）$(x-3)^2-4$，对称轴是 $x=3$

（2）4　（3）$\dfrac{3}{2}$

【分析】（1）根据完全平方公式解答即可.

（2）利用完全平方公式把原式变形，结合对称轴的意义解答即可.

（3）利用完全平方公式把原式变形，根据偶次方的非负性计算，得到答案.

本题考查了完全平方公式的应用，熟练掌握公式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：根据题意，得 $x^2-6x+5=(x-3)^2-4$，

故 x^2-6x+5 的对称轴是 $x=3$.

【小问 2 详解】

解：根据题意，得 $x^2+2ax-1=(x+a)^2-a^2-1$，

故 $x^2+2ax-1$ 的对称轴是 $x=-a$.

$\because$ 关于 x 的多项式 $x^2+2ax-1$ 关于 $x=-4$ 对称，

$\therefore -a=-4$，

解得 $a=4$，

故答案为：4.

【小问 3 详解】

解：根据题意，得 $(x^2+2x+1)(x^2-8x+16)$

$=(x+1)^2 \cdot (x-4)^2$

$=\left[(x+1)\cdot(x-4)\right]^2$

$=\left[(x^2-3x-4)\right]^2$

$=\left[\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}\right]^2$，

故代数式$\left(x^{2}+2x+1\right)\left(x^{2}-8x+16\right)$的对称轴是$x=\frac{3}{2}$，

故答案为：$\frac{3}{2}$．

27. 【答案】（1）$BC\perp CE$

（2）$CD-BD=2EF$ 或 $BD-CD=2EF$，见解析

【分析】（1）根据已知条件求出∠B=∠ACB=45°，证明△BAD≌△CAE，得到∠ACE=∠B=45°，求出∠BCE=∠ACB+∠ACE=90°，即可得到结论 $BC\perp CE$；

（2）根据题意作图即可，证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$．得到$BD=CE$，$\angle B=\angle ACE$，$\angle ADB=\angle AEC$，推出$\angle ACB=\angle ACE$．延长 EF 到点 G，使$FG=EF$，证明$\triangle ADC\cong\triangle AGC$，推出$CD=CG$．由此得到$CD-BD=2EF$．同理可证$BD-CD=2EF$．

【小问 1 详解】

解：$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC$，

∴∠B=∠ACB=45°，

∵$\angle DAE=\angle BAC$，

∴$\angle DAE-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$，即∠$BAD$=∠$CAE$，

∵$AB=AC$，$AD=AE$，

∴△BAD≌△CAE，

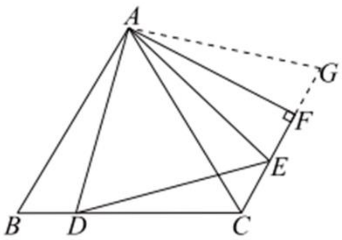
∴∠ACE=∠B=45°，

∴∠BCE=∠ACB+∠ACE=90°，

∴$BC\perp CE$；

【小问 2 详解】

解：如图，补全图形；



$CD-BD=2EF$．

证明：∵$\angle BAC=\angle DAE$，

∴$\angle BAD=\angle CAE$．

又∵$AB=AC$，$AD=AE$，

∴$\triangle ABD\cong\triangle ACE$．

∴$BD=CE$，$\angle B=\angle ACE$，$\angle ADB=\angle AEC$．

∵$AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle ACB$.

$\therefore \angle ACB=\angle ACE$.

延长 EF 到点 G，使 $FG=EF$.

$\because AF\perp CE$，

$\therefore AE=AG$.

$\therefore \angle AEG=\angle G$.

$\because \angle ADB=\angle AEC$，

$\therefore \angle ADC=\angle AEG$.

$\therefore \angle ADC=\angle G$.

$\because AC=AC$，

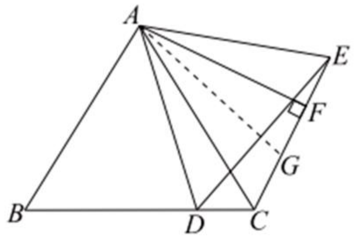
$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AGC$.

$\therefore CD=CG$.

$\because CG-CE=2EF$，

$\therefore CD-BD=2EF$.

如图，同理可证 $BD-CD=2EF$.



.

【点睛】此题考查了全等三角形的判定及性质，等腰三角形的性质，熟记全等三角形的判定及性质是解题的关键．掌握分类思想解题是难点．

28. 【答案】（1）①$(0,4)$；②P_1，P_3

（2）$2\le n\le 4$ 或 $n=12$

（3）$1\le a\le \dfrac{3}{2}$ 或 $3\le a\le \dfrac{9}{2}$ 或 $6\le a\le 9$.

【分析】（1）①当 $a=4$ 时，可得点 $A(4,0)$，$B(4,4)$．根据四边形 $OABC$ 是正方形，可得 $OC=OA=4$，所以点 C 的坐标是 $(0,4)$；

②分别求出三个点到正方形 $OABC$ 的边所在直线的最大距离和最小距离，再根据“3 倍距离点”的定义判断即可；

（2）当 $a=6$ 时，点 $A(6,0)$，$B(6,6)$，$C(0,6)$，然后讨论点 n 的取值，确定点 P 到正方形 $OABC$ 的边所在直线的最大距离和最小距离，再根据“2 倍距离点”的定义求解即可；

（3）求出直线 MN 的解析式为 $y=x$，设线段 MN 上一点 $P(m,m)$，则 $2\le m\le 3$，分两种情况讨论：当 P 在正方形内时，当 P 在正方形外时，进而可以解决问题．

【小问 1 详解】

解：①当 $a=4$ 时，如图 1，点 $A(4,0)$，$B(4,4)$．

∵四边形 $OABC$ 是正方形，

∴ $OC=OA=4$， $OC//AB$， $AB\perp OA$，

∴ $OC\perp OA$，即点 C 在 y 轴上，

∴点 C 的坐标是 $(0,4)$，

故答案为：$(0,4)$)；

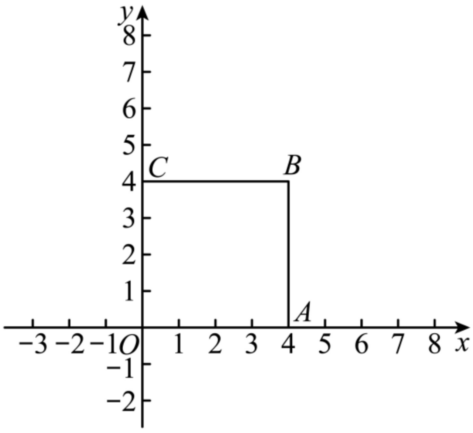


图1

②如图所示， $P_1(1,1)$ 当正方形 $OABC$ 的边所在的直线的距离最大值为 $4-1=3$，最小值为 $1-0=1$，

∴ $P_1(1,1)$ 是正方形 $OABC$ 的“3 倍距离点”；

同理可知 $P_2(2,2)$ 是正方形 $OABC$ 的“1 倍距离点”；

$P_3(-2,2)$ 是正方形 $OABC$ 的“3 倍距离点”；

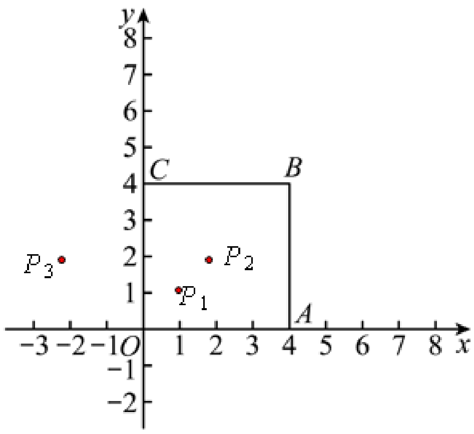


图1

∴ P_1,P_3 是正方形 $OABC$ 的“3 倍距离点”，

故答案为： P_1,P_3；

【小问 2 详解】

解：当 $a=6$ 时，如图 2，点 $A(6,0)$，$B(6,6)$，$C(0,6)$，

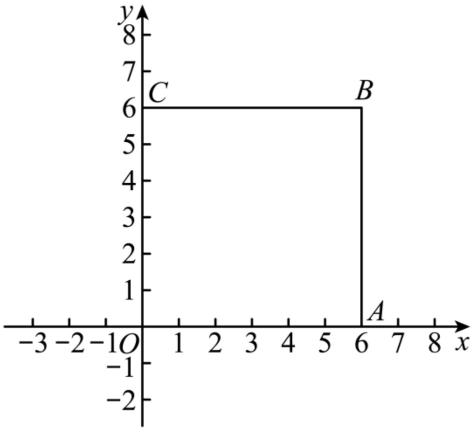


图2

$\because P(2,n)$，

$\therefore$ 当 $0<n<2$ 时，P 到 BC 的距离 >2 倍的 P 到 OA 的距离，此时不符合题意；

当 $2\le n\le 4$ 时，P 到 AB 的距离 $=2$ 倍的 P 到 OC 的距离，此时符合题意；

当 $4<n<6$ 时，P 到 BC 的距离 <2 倍的 P 到 OA 的距离，此时不符合题意；

当 $6\le n\le 8$，且 P 到 BC 的距离 $=2$ 倍的 P 到 OA 的距离时，

$\therefore \dfrac{n}{n-6}=2$，

$\therefore n=12$，

经检验 $n=12$ 是原方程的解；

当 $n>8$，且点 P 到直线 OA 的距离等于 2 倍的点 P 到 OC 的距离时，

$\therefore 2\times 2=n$，即 $n=4$（舍去）

综上所述：点 $P(2,n)$（其中 $n>0$）是正方形 $OABC$ 的“2 倍距离点”时，n 的取值范围是 $2\le n\le 4$ 或 $n=12$；

【小问 3 详解】

解：设直线 MN 的解析式为 $y=kx+b$，

$\therefore \begin{cases}2k+b=2\\3k+b=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=1\\b=0\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y=x$，

设线段 MN 上一点 $P(m,m)$，

则 $2\le m\le 3$，

当 P 在正方形内时，

① $\frac{a-m}{m}=2$，

$\therefore a=3m$，

$\therefore 6\le a\le 9$；

② $\frac{m}{a-m}=2$，

$\therefore a=\frac{3}{2}m$，

$\therefore 3\le a\le \frac{9}{2}$；

当 P 在正方形外时，

$\frac{m}{m-a}=2$，

$\therefore a=\frac{1}{2}m$，

$\therefore 1\le a\le \frac{3}{2}$；

此时不存在 $\frac{m-a}{m}=2$ 的情况，

$\therefore$ 线段 MN 上存在正方形 $OABC$ 的“2 倍距离点”，a 的取值范围是 $1\le a\le \frac{3}{2}$ 或 $3\le a\le \frac{9}{2}$ 或 $6\le a\le 9$．

【点睛】本题属于一次函数的综合题，考查了正方形的性质，平面直角坐标系，“k 倍距离点”的定义等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，学会寻找特殊位置．