# 北京市第五十五中学 2024-2025 学年度第一学期

## 10 月调研试卷

## 高三数学

本试卷共 4 页，共 150 分，调研时长 120 分钟

## 第一部分（选择题 共 40 分）

一. 选择题. 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 每题 4 个选项中只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x-2\geq 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（ ）

A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{1,2\}$

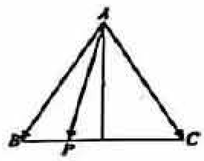
2. 已知复数 $z=\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$，则 $|z|=$（ ） A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

3. $(2x-\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中 $x$ 的系数为（ ） A. -80 B. -40 C. 40 D. 80

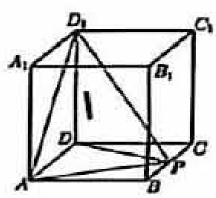
4. 在平面直角坐标系中，角 $\alpha$ 的终边过点 $(-1,0)$，将 $\alpha$ 的终边绕原点按逆时针方向旋转 $120°$ 与角 $\beta$ 的终边重合，则 $\cos\beta=$（ ） A. $\dfrac{1}{2}$ B. $-\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. 数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n(n\in N^*)$，则 $S_5$ 等于（ ）

A. 32 B. 48



6. 如图，已知等腰 $\triangle ABC$ 中，$|AB|=|AC|=3$，$|BC|=4$，点 $P$ 是边 $BC$ 上的动点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$（ ） A. 为定值 10 B. 为定值 6 C. 有最大值为 10 D. 有最小值为 6



7. 如图，边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$P$ 为 $BC$ 边任意一点，将正方体挖掉三棱锥 $D_1-ADP$ 后，余下部分的体积为（ ）

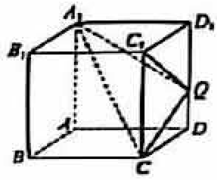
A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{5}{6}$

8. 圆 $C$：$(x-4)^2+(y-5)^2=4$ 上的动点 $P$ 到直线 $l$：$mx+y-m-1=0$ 的距离的最大值是（　）

A. 6　　　　B. 7　　　　C. 8　　　　D. 9

9. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零不共线向量，设条件 $M:\vec{b}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，条件 $N$：对一切 $\lambda\in\mathbf{R}$，不等式 $|\vec{a}-\lambda\vec{b}|\ge|\vec{a}-\vec{b}|$ 恒成立，则 $M$ 是 $N$ 的（　）

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件




10. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$Q$ 是棱 $DD_1$ 上的动点．则下列说法正确的是（　）①存在点 $Q$，使得 $C_1Q\parallel A_1C$；②存在点 $Q$，使得 $C_1Q\perp A_1C$；③对于任意点 $Q$，$Q$ 到 $A_1C$ 的距离的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$ ④对于任意点 $Q$，$\triangle A_1CQ$ 都是钝角三角形

A. ①②③　　　　B. ①④　　　　C. ②③　　　　D. ②④

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\ln x$ 的定义域是________.

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的两条渐近线互相垂直，则 $C$ 的离心率为________.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x\le 0\\ -x^2+2x+1, & x>0\end{cases}$，当 $x\in(a,1)$ 时，$f(x)$ 有最小值，则实数 $a$ 的取值范围是________，

14. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)(\varphi>0)$，若 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\varphi$ 的一个取值为________.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，若对任意的正整数 $n$，总存在正整数 $m$，使得 $S_n=a_m$，下列正确的命题是________.

① $\{a_n\}$ 可能为等差数列；② $\{a_n\}$ 可能为等比数列；③ $a_i(i\ge 2)$ 均能写成 $\{a_n\}$ 的两项之差；

④对任意 $n\in\mathrm{N},n\ge 1$，总存在 $m\in\mathrm{N},m\ge 1$，使得 $a_n=S_m$．

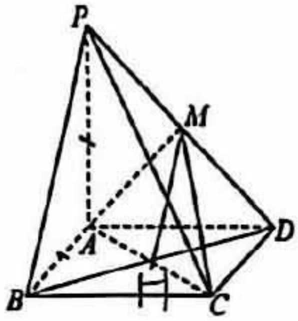
三. 解答题:共6小题，共85分.

16.（本小题13分）在$\Delta ABC$中，$\angle A$为锐角，且 $\sin 2A=\frac{6}{5}\cos A$.

(1)求$\cos A$的值;

(2)若$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$b=10$，求$c$和$\Delta ABC$面积.

17.（本小题14分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB$，$M$为线段$PD$的动点.




(1) 若直线$PB//$平面$ACM$，求证：$M$为$PD$的中点;

(2) 求证：平面$ABM\perp$平面$PAD$

(3) 若平面$PAC$与平面$MAC$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\frac{PM}{MD}$的值.

18.（本小题13分）某技术职能部门在东区、西区开展了技能测试，其中东区、西区的各年龄段参加测试的人数、技能成绩的优秀比例如下：

| 年龄段 | 东区 | | 西区 | |
|---|---|---|---|---|
| | 参加测试人数 | 优秀比例 | 参加测试人数 | 优秀比例 |
| $[20,25)$ | 60 | 40% | 100 | 48% |
| $[25,30)$ | 75 | 52% | 100 | 61% |
| $[30,35)$ | 95 | 60% | 60 | 65% |
| $[35,40]$ | 120 | 75% | 40 | 80% |

(1)该技术职能部门从年龄段在$[20,25)$的参加测试人员中随机选择1人，求此人技能优秀的概率;

(2)在年龄段在$[35,40]$的参加测试人员中，从东区、西区各随机抽取1人，技能优秀人数记为$X$，求$X$的分布列和数学期望$E(X)$;

(3)该技术职能部门从东区、西区参加测试的人员中各随机抽取10人，记$Y_1,Y_2$分别为东区、西区所选出10人中的技能优秀人数，试比较数学期望$E(Y_1),E(Y_2)$的大小（直接写出结果即可）

19.（本小题 15 分）2. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，一个焦点为$F\left(\sqrt{2},0\right)$，

$P$是椭圆上一动点（与左、右顶点不重合）.已知$\Delta PF_1F_2$的面积的最大值为2.

（1）求椭圆$C$的方程；

（2）过点$\left(1,0\right)$且斜率不为0的直线$l$与椭圆$C$相交于$M$，$N$两点，椭圆长轴的两个端点分别为$A_1$，$A_2$，

$A_1M$与$A_2N$相交于点$Q$，求证：点$Q$在某条定直线上.

20.（本小题 15 分）已知函数$f\left(x\right)=ax\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+\left(1-a\right)x$.

(1)当$a=1$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f(1)\right)$处的切线方程；

(2)当$a<0$时，求$f\left(x\right)$的极值；

(3)当$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$时，判断$f\left(x\right)$零点个数，并说明理由.

21.（本小题 15 分）已知$n$行$n$列$\left(n\geq 2\right)$的数表$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$中，对任意的$i\in\left\{1,2,\cdots,n\right\}$，

$j\in\left\{1,2,\cdots,n\right\}$，都有$a_{ij}\in\left\{0,1\right\}$.若当$a_{ij}=0$时，总有$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\geq n$，则称数表$A$为典型表，此时记

$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$.

(1)若数表$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，请直接写出$B$，$C$是否是典型表；

(2)当$n=6$时，是否存在典型表$A$使得$S_6=17$，若存在，请写出一个$A$；若不存在，请说明理由；

(3)求$S_n$的最小值.