2024—2025学年度第一学期高三数学10月练习题

考试时间：120分钟　　满分：150分

命题：王文涛　　审核：樊登麟

一、选择题（本大题共10题，每题4分，共40分）

1. 已知集合$A=\{x|-1<x<1\}, B=\{x|0\le x\le 3\}$，则$A\cup B=$（　　）

A. $(-1,3]$　　B. $[0,1]$　　C. $[0,1)$　　D. $(-1,3)$

2. 设i为虚数单位，如果复数z满足$(1-2i)z=5i$，那么z的虚部为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. i　　D. $-i$

3. 已知$x, y\in R$，且$a^x<a^y(0<a<1)$，则下列不等式恒成立的是（　　）

A. $\tan x>\tan y$　　B. $\ln x>\ln y$

C. $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$　　D. $2^x+2^{-y}>2$

4. 已知$\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{2}\right)^6$的展开式中$x^4$的系数为$\dfrac{3}{4}$，则常数$a$的值为（　　）

A. -2　　B. 2　　C. 4　　D. -4

5. 已知$f(x)=ae^x+be^{-x}(ab\neq 0)$，则"$a+b=0$"是"$f(x)$为奇函数的"（

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

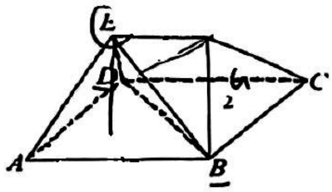
6. 在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{3}$, $AD=1$，点P为CD的中点，则$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}$的值为（

A. 0　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

7. 在ΔABC中角A, B, C所对的边分别为a, b, c，不能确定$\angle C$为锐角的有（　　）.

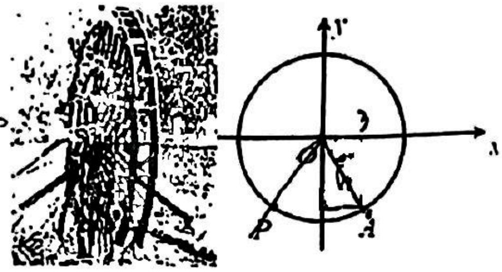
A. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$　　B. $a^2+b^2>c^2$

8. 我国古代数学名著《九章算术》对立体几何有深入的研究，从其中的一些数学用语可见，譬如将有三条棱互相平行且有一个面为平行四边形的五面体称为刍甍，今有一刍甍，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF//$ 面 $ABCD$，记该刍甍的体积为 V_1，三棱锥 $E-ABD$ 的体积为 V_2，$AB=a$，$EF=b$，若 $\frac{V_2}{V_1}=\frac{2}{5}$，则 $\frac{b}{a}=$（　）



A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 水车在古代是进行灌溉引水的工具，亦称“水转筒车”，是一种以水流作动力，取水灌田的工具．据史料记载，水车发明于隋而盛于唐，距今已有 1000 多年的历史，是人类的一项古老的发明，也是人类利用自然和改造自然的象征．如图是一个半径为 R 的水车，一个水斗从点 $A(3,-3\sqrt{3})$ 出发，沿圆周按逆时针方向匀速旋转，且旋转一周用时 120 秒．经过 t 秒后，水斗旋转到 P 点，设点 P 的坐标为 (x,y)，其纵坐标满足 $y=f(t)=R\sin(\omega t+\varphi)$（$t\geq 0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$），则下列叙述正确的是（　）



A. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

B. 当 $t\in[0,60]$ 时，函数 $y=f(t)$ 单调递增

C. 当 $t=100$ 时，$|PA|=6$

D. 当 $t\in[0,60]$，$|f(t)|$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n-1}+a_{n+1}>2a_n(n>1,n\in N^*)$，下列命题中，正确的序号是（　）

① 若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_2>a_1$，则 $a_n>a_{n-1}(n>1,n\in N^*)$ 成立；

② 存在常数 c，使得 $a_n>c\ (n\in N^*)$ 成立；

③ 若 $p+q>m+n$（其中 $p,q,m,n\in N^*$），则 $a_p+a_q>a_m+a_n$；

④ 存在常数 d，使得 $a_n>a_1+(n-1)d\ (n\in N^*)$ 都成立．

A. ①②　　B. ②③④　　C. ①②④　　D. ①④

二、填空题（本大题共5题，每题5分，共25分）

11. 函数$f(x)=\tan x+\lg(4-x^2)$的定义域是________.

12. 已知平面向量$\vec{a}=(3\sin\theta,\ -4\cos\theta)$，$\vec{b}=(1,1)$，若$\theta$为第二象限且$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$____.

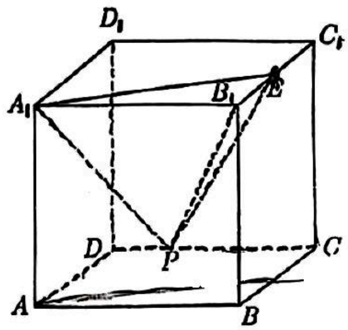
13. 已知函数$f(x)=\sin 2x$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位得到函数$g(x)$的图像，若函数$g(x)$在区间$(m,0)$单调递增，则m的最小值为______.

14. 某公司工人甲生产第x件产品的所需时间$f(x)$（单位：h）满足：

$$f(x)=\begin{cases}4-\log_a x,\ 0<x<\lambda\\ \dfrac{10}{x+1},\ \lambda\leqslant x\leqslant 8\end{cases}$$

，其中$a>0$且$a\neq1$，若甲生产第2件产品用$3h$，生产第λ件产品的时间为$2h$，则$f(3)=$________.

15. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱B_1C_1的中点 动点P沿着棱DC从点D向点C移动，对于下列结论：



① 存在点P，使得$PA_1=PE$；

②平面PA_1E与正方体所截得的图形恒为四边形；

③点B_1到面PA_1E的距离越来越大；

④三棱锥A_1-PB_1E的体积保持不变；

⑤ 在点P运动过程中，存在某点P，使得直线B_1P与直线A_1D_1夹角为60°；

其中正确的结论的序号是________.

三、解答题（本大题共 6 题，共 85 分）

16. （本题 13 分）

已知$\triangle ABC$中，a, b, c分别为角A, B, C的对边，且$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，__________.

（Ⅰ）求$\cos A$的值；

（Ⅱ）试比较$\angle B$和$\angle C$的大小，并说明理由.

从① $B=2A$，② $c\tan A=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\sin C$，这两个条件中任选一个，完成解答.

17. （本题 13 分）

为了解某地区初中学生的体质健康情况，统计了该地区 8 所学校学生的体质健康数据，按总分评定等级为优秀，良好，及格，不及格．良好及其以上的比例之和超过40%的学校为先进校．各等级学生人数占该校学生总人数的比例如表：

学校 比例 等级	学校 A	学校 B	学校 C	学校 D	学校 E	学校 F	学校 G	学校 H
优秀	8%	3%	2%	9%	1%	22%	2%	3%
良好	37%	50%	23%	30%	45%	46%	37%	35%
及格	22%	30%	33%	26%	22%	17%	23%	38%
不及格	33%	17%	42%	35%	32%	15%	38%	24%

（Ⅰ）从 8 所学校中随机选出一所学校，求该校为先进校的概率；

（Ⅱ）从 8 所学校中随机选出两所学校，记这两所学校中不及格比例低于30%的学校个数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）设 8 所学校优秀比例的方差为s_1^2，良好及其以下比例之和的方差为s_2^2，比较s_1^2与s_2^2的大小．(只写出结果)

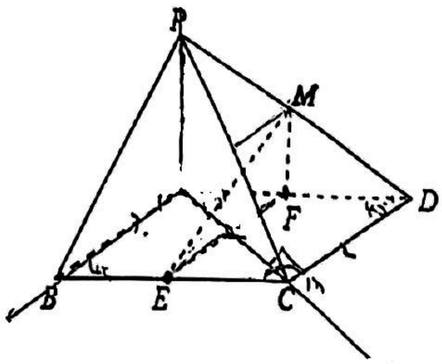
18. （本题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是平行四边形，$\angle BCD=135^\circ$，侧面$PAB\perp$底面$ABCD$，$\angle BAP=90^\circ$，$AB=AC=PA=2$，E，F分别为BC，AD的中点，点M在线段PD上.

（Ⅰ）求证：无论点M在线段PD何处，总有平面$MEF\perp$平面PAC；

（Ⅱ）求二面角$B-PC-D$的余弦值；

（Ⅲ）是否存在点M，使得直线ME与平面PBC所成的角为30°，若存在，求出$\dfrac{PM}{PD}$的值；若不存在，请说明理由.



19. （本题 15 分）

已知函数$f(x)=m\ln x-\dfrac{1}{2}x^2\ (m\in\mathrm{R})$；

（Ⅰ）若$m=2$，求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

（Ⅱ）若$y=f(x)$在$\left[\sqrt{e},\ e\right]$上有零点，求$m$的取值范围.

（Ⅲ）求证：当$m>0$时，过点$(0,1)$恒可以作$f(x)$的切线.

20. （本题 15 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，右焦点为$F(c,0)$，左顶点为$A$，右顶点$B$在直线$l:x=2$上.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）设点P是椭圆C上异于A，B的点，直线AP交直线l于点D，当点P运动时，判断以BD为直径的圆与直线PF的位置关系，并加以证明.

21.（本题 15 分）

已知数列$A:a_1,a_2,\cdots,a_{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$，现将数列$A$的项分成个数相同的两组，第一组为$B:b_1,b_2,\cdots,b_n$，满足$b_i\geqslant b_{i+1}(i=1,2,\ldots,n-1)$；第二组为$C:c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足$c_i\leqslant c_{i+1}$，其中$i=1,2,\ldots,n-1$，记$M=\sum\limits_{i=1}^{n}\left|b_i-c_i\right|$.

（Ⅰ）若数列$A:1,2,4,8$，写出数列A的一种分组结果，并求出此时M的值；

（Ⅱ）若数列$A:1,2,3,\cdots,2n$，证明：$\max\{b_i,\ c_i\}\geqslant n+1\ (i=1,2\ldots,n)$；（其中$\max\left\{b_i,c_i\right\}$表示$b_i,c_i$中较大的数）

（Ⅲ）证明：M的值与数列A的分组方式无关.