2024 北京十二中高三 10 月月考

数　　学

2024.10

本试卷共 4 页，满分 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题纸交回.

第一部分 选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，集合 $B=\{x\in Z\mid x^2-2x\leq 0\}$，那么 $A\cup B$ 等于（　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 设复数 z 满足 $(2-i)z=2+i$，则 z 在复平面内所对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $f(x)=-\ln x$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=3^{|x-1|}$

4. 在 $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A. -4　　B. 4　　C. -6　　D. 6

5. 设 $a,b\in\mathrm{R},ab\neq 0$，且 $a>b$，则（　）

A. $\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$　　B. $\left|\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right|>2$

C. $\sin(a-b)<a-b$　　D. $3^a>2^b$

6. 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，若 $a^2-b^2=bc$，$\sin C=2\sin B$，则 A 等于（　）

A. $\dfrac{5\pi}{6}$　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

7. 函数 $f(x)=2^x+x$，$g(x)=\log_2 x+x$，$h(x)=\sqrt{x}+x$ 的零点分别为 a，b，c，则 a，b，c，的大小顺序为（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的过分别为 a，b，c，则“$\cos 2A>\cos 2B$”是“$a<b$”的（　）

A. 充分不必要条件　　　　　　　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 恩格斯曾经把对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立称为十七世纪数学的三大成就.其中对数的发明曾被十八世纪法国数学家拉普拉斯评价为“用缩短计算时间延长了天文学家的寿命”.已知正整数 N 的 70 次方是一个 83 位数，则由下面表格中部分对数的近似值（精确到 0.001），可得 N 的值为（　）

M	2	3	7	11	13
$\lg M$	0.301	0.477	0.845	1.041	1.114

A. 13　　　　B. 14　　　　C. 15　　　　D. 16

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x & x\geq a\\ 2x-a & x<a\end{cases}$，有最大值，并将其记为 $F(a)$，则说法正确的是（　）

A. a 的最小值为-2，$F(a)$ 的最大值为 2　　　　B. a 的最大值为$\sqrt{2}$，$F(a)$ 的最小值为$\sqrt{2}$

C. a 的最大值为$\sqrt{2}$，$F(a)$ 的最大值为 2　　　　D. a 的最小值为-2，$F(a)$ 的最小值为$\sqrt{2}$

第二部分 非选择题（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\ln x$ 的定义域是__________.

12. 点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与 $Q\left(\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right),\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$，关于 x 轴对称，写出一个符合题意的 θ 值______.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n, a_1=3, a_1-a_2=a_3$，则 S_n 的最大值为______.

14. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（A，$\omega$，$\varphi$ 是常数，$A>0$，$\omega>0$）. 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 ω 的值为________.

15. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^3-x}$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 是奇函数；

② $\forall k\in\mathrm{R}$，且 $k\neq 0$，关于 x 的方程 $f(x)-kx=0$ 恰有两个不相等的实数根；

③已知 P 是曲线 $y=f(x)$ 上任意一点，$A\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，则 $|AP|\geq\dfrac{1}{2}$；

④设$M(x_1,y_1)$为曲线 $y=f(x)$ 上一点，$N(x_2,y_2)$为曲线 $y=-f(x)$ 上一点.若 $|x_1+x_2|=1$，则 $|MN|\geq 1$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应与出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=a\sin x\cos x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

（1）求 a 的值和 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的最大值和最小值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A， B， C 的对边分别为 a， b， c， $\sin A\cos B=2\sin A-\cos A\sin B$.

（1）求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值；

（2）若 $b=3$，从下列三个条件中选出一个条件作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$；条件②：$\cos B=\frac{11}{16}$；条件③：$\triangle ABC$ 的周长为 9.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. 某学校为提升学生的科学素养，所有学生在学年中完成规定的科普学习任务，并通过科普测试获得相应科普过程性积分.现从该校随机抽取 60 名学生，获得其科普测试成绩（百分制，且均为整数）及相应过程性积分数据，整理如下表：

科普测试成绩 x	科普过程性积分	人数
$90\le x\le 100$	3	20
$75\le x<90$	2	10
$60\le x<75$	1	15
$0\le x<60$	0	15

用频率估计概率.

（1）从该校全体学生中随机抽取一名学生，估计这名学生科普过程性积分不低于 2 分的概率；

（2）从该校全体学生中随机抽取三名学生，估计这三名学生的科普过程性积分之和恰好为 6 分的概率；

（3）从该校科普过程性积分不低于 1 分的学生中随机抽取两名学生，记这两名学生科普过程性积分之差的绝对值不超过 1 的概率估计值记为 p_1，这两名学生科普过程性积分之差的绝对值不低于 1 的概率估计值记为 p_2，试判断 p_1 和 p_2 的大小（结论不要求证明）.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x+1}{e^x}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）求证：当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时， $f\left(x\right)>-\frac{1}{2}x^2+1$；

（3）过原点是否存在曲线 $f\left(x\right)$ 的切线，若存在，求出切线方程；若不存在，说明理由.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m}{(x-1)^2}+\ln(x-1)$，其中 $m\in\mathrm{R}$.

（1）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上存在极值，求实数 m 的取值范围；

（3）求 $f(x)$ 的零点个数.

21. 对于数列 $\{a_n\}$，定义 $a_n^*=\begin{cases}1, a_{n+1}\ge a_n,\\ -1, a_{n+1}<a_n.\end{cases}$ 设 $\{a_n^*\}$ 的前 n 项和为 S_n^* .

（1）设 $a_n=\dfrac{n}{2^n}$，写出 a_1^*，a_2^*，a_3^*，a_4^*；

（2）证明："对任意 $n\in N^*$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$"的充要条件是"对任意 $n\in N^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$"；

（3）已知首项为 0，项数为 $m+1(m\ge 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足：

①对任意 $1\le n\le m$ 且 $n\in N^*$，有 $a_{n+1}-a_n\in\{-1,0,1\}$ ；

② $S_m^*=a_m$.

求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数.

参考答案

第一部分 选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

【1 题答案】D

【2 题答案】A

【3 题答案】C

【4 题答案】A

【5 题答案】C

【6 题答案】C

【7 题答案】C

【8 题答案】C

【9 题答案】C

【10 题答案】B

第二部分 非选择题（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

【11 题答案】$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【12 题答案】$\frac{7\pi}{8}$（答案不唯一）

【13 题答案】6

【14 题答案】$\frac{3}{2}$##1.5

【15 题答案】②③④

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应与出文字说明，演算步骤或证明过程.

【16 题答案】（1）$a=2$，$T=\pi$

（2）$f(x)$最小值为-1，$f(x)$最大值为 1

【17 题答案】（1）2

（2）选条件①不合题意；选条件②或③$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{15}}{4}$

【18 题答案】（1）$\frac{1}{2}$

（2）$\frac{37}{108}$

（3）$p_2<p_1$

【19题答案】（1）极大值为1，无极小值

（2）证明见解析　（3）不存在，理由见解析

【20题答案】（1）$y=-x+3$

（2）$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

（3）答案见解析

【21题答案】（1）答案见解析.

（2）证明见解析.　（3）$(m-1)\cdot 2^{m-2}$.