

# 北京市第六十六中学 2024—2025 学年第一学期第二次质量检测

## 高三数学

2024.10

试卷说明：

1. 本试卷共 三 道大题，共 4 页。
2. 卷面满分 150 分，考试时间 120 分钟。
3. 试题答案一律在答题纸上作答，在试卷上作答无效。

### 一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合  $A = \{x | -4 < x < 2\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 9\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $(-4, 3]$       B.  $[-3, 2)$       C.  $(-4, 2)$       D.  $[-3, 3]$

2. 若  $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ ， $\tan \theta > 0$ ，则  $\cos \theta =$  ( )

- A.  $\frac{3}{4}$       B.  $-\frac{3}{4}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $-\frac{3}{5}$

3. 若角  $\theta$  的终边过点  $P(3, -4)$ ，则  $\sin(\theta - \pi) =$  ( )

- A.  $\frac{4}{5}$       B.  $-\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $-\frac{3}{5}$

4. 下列函数中，既是偶函数，又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的是 ( )

- A.  $y = x^3$       B.  $y = \cos x$       C.  $y = \ln \frac{1}{x^2}$       D.  $y = 2^{|x|}$

5. 已知  $a = 2^{\frac{1}{3}}$ ， $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ，则 ( )。

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$       C.  $c > a > b$       D.  $c > b > a$

6. 已知  $a > b$ ，则 ( )

- A.  $3a > 2b$       B.  $\frac{a}{3} > \frac{b}{2}$       C.  $3^a > 2^b$       D.  $3^{a-b} > 2^{b-a}$



7. 设  $x \in \mathbb{R}$  且  $x \neq 0$ , 则 “ $x > 1$ ” 是 “ $x + \frac{1}{x} > 2$ ” 成立的

- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充分必要条件          D. 既不充分也不必要条件

8. 若函数  $f(x) = (ax^2 + bx)e^x$  的图像如图所示, 则实数  $a, b$  的值可能为 ( )

- A.  $a=1, b=2$               B.  $a=1, b=-2$   
C.  $a=-1, b=2$              D.  $a=-1, b=-2$



9.  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$  在区间  $(b, +\infty)$  上极大值也是最大值, 则  $b$  的取值范围是(

- A.  $[-3, +\infty)$       B.  $(3, +\infty)$       C.  $[-3, 3)$       D.  $(-3, 3)$

10. 若函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$  的定义域和值域的交集为空集, 则正数  $a$  的取值范

围是 ( )

- A.  $(0, 1]$               B.  $(0, 1)$               C.  $(1, 4)$               D.  $(2, 4)$

## 二、填空题 (每小题 5 分, 共 25 分)

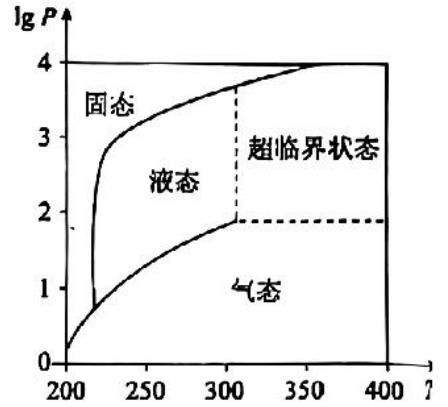
11. 计算  $\ln 1 + \lg 2 - \lg \frac{1}{4} + 3 \lg 5 =$  \_\_\_\_\_

12. 函数  $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2 - 3x + 4}}$  的定义域为 \_\_\_\_\_

13. 已知角  $\alpha, \beta$  的终边关于原点  $O$  对称, 则  $\cos(\alpha - \beta) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+3) = f(x)$ , 当  $x \in (0, 1]$  时,  $f(x) = 3^x + \ln x$ , 则  $f(2024) =$  \_\_\_\_\_.

15. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献, 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与  $T$  和  $\lg P$  的关系, 其中  $T$  表示温度, 单位是  $K$ ;  $P$  表示压强, 单位是  $\text{bar}$ . 下列结论中不正确的是\_\_\_\_\_.



- ①当  $T=220, P=1026$  时, 二氧化碳处于液态.
- ②当  $T=270, P=128$  时, 二氧化碳处于气态.
- ③当  $T=300, P=9987$  时, 二氧化碳处于超临界状态.
- ④当  $T=360, P=729$  时, 二氧化碳处于超临界状态.



三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分)

16. (本小题 13 分)

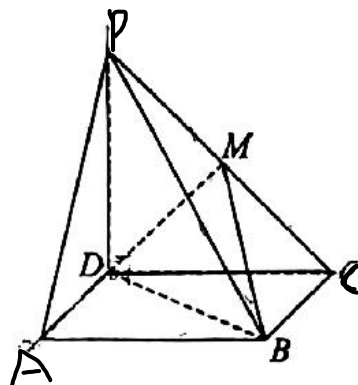
已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  在  $x_0$  处取得极小值  $-\frac{3}{2}$ , 其导函数为  $f'(x)$ . 当  $x$  变化时,  $f'(x)$  变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0		0	+

- (1) 写出  $x_0$  的值, 并说明理由;
- (2) 求  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上的最大值与最小值及相应的  $x$  值.

17. (本小题 14 分)

如图所示, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  是矩形,  $M$  是线段  $PC$  的中点. 已知  $PD = CD = 2$ ,  $AD = 1$ .



- (1) 求证:  $PA \parallel$  平面  $BDM$ ;
- (2) 求二面角  $M-BD-C$  的余弦值;

18 (本小题 15 分)

$H$  地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据, 得到频率分布直方图 (如图 1), 考虑到受市场影响, 预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表 1 (该预测价格与亩产量互不影响).

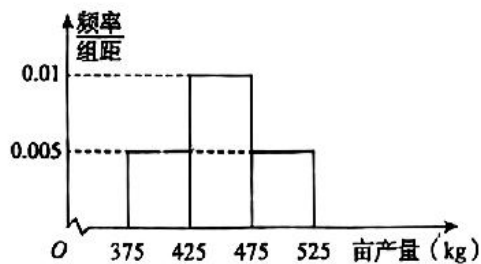


图 1



明年冬小麦统一收购价格 (单位: 元/kg)	2.4	3
概率	0.4	0.6

表 1

假设图 1 中同组的每个数据用该组区间的中点值估算, 并以频率估计概率.

- (1) 试估计  $H$  地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率;
- (2) 设  $H$  地区明年每亩冬小麦统一收购总价为  $X$  元, 求  $X$  的分布列和数学期望;
- (3)  $H$  地区农科所研究发现, 若每亩多投入 125 元的成本进行某项技术改良, 则可使每亩冬小麦产量平均增加 50kg. 从广大种植户的平均收益角度分析, 你是否建议农科所推广该项技术改良? 并说明理由.

19. (本小题 13 分)

设函数  $f(x) = xe^{a-x} + bx$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = x + 1$ .

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求  $f(x)$  的单调区间.



20 (本小题 15 分)

国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达 35% 以上。截至 2019 年底，这 46 个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近 70%。某企业积极响应国家垃圾分类号召，在科研部门的支持下进行技术创新，新上一种把厨余垃圾加工处理为可重新利用的化工产品的项目。已知该企业日加工处理量  $x$  (单位：吨) 最少为 70 吨，最多为 100 吨。日加工处理总成本  $y$  (单位：元) 与日加工处理量  $x$  之间的函数关系可近似地表示为  $y = \frac{1}{2}x^2 + 40x + 3200$ ，且每加工处理 1 吨厨余垃圾得到的化工产品的售价为 100 元。

(1) 该企业日加工处理量为多少吨时，日加工处理每吨厨余垃圾的平均成本最低？此时该企业处理 1 吨厨余垃圾处于亏损还是盈利状态？

(2) 为了该企业可持续发展，政府决定对该企业进行财政补贴，补贴方式共有两种。

①每日进行定额财政补贴，金额为 2300 元；

②根据日加工处理量进行财政补贴，金额为  $30x$ 。

如果你是企业的决策者，为了获得最大利润，你会选择哪种补贴方式进行补贴？为什么？

21. (本小题 15 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}a(x-1)$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若  $a = -2$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;

(2) 若不等式  $f(x) < 0$  对任意  $x \in (1, +\infty)$  恒成立.

(i) 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 试比较  $e^{a-2}$  与  $a^{e-2}$  的大小, 并给出证明 ( $e$  为自然对数的底数,  $e \approx 2.71828$ ).

