2024 北京九中高三 10 月月考

数　学

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

一、单选题（共 40 分）

1．（本题 4 分）若集合 $A=\{0,1,3\}$，$B=\{-1,0,2,3\}$，则 $A\cup B$ 等于（　）

A．$\{-1,0,1,2,3\}$　B．$\{-1,0,2,3\}$　C．$\{0,1,3\}$　D．$\{0,3\}$

2．（本题 4 分）下列函数中，既是奇函数又是增函数的是（　）

A．$y=x+1$　B．$y=\frac{1}{x}$　C．$y=-x^3$　D．$y=\begin{cases}x^2, x\geq 0,\\ -x^2, x<0\end{cases}$

3．（本题 4 分）已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{4},\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$（　）

A．$\frac{1}{4}$　B．$\frac{1}{3}$　C．3　D．4

4．（本题 4 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=5$，$a_2=2$，则 $\{a_n\}$ 的公比为（　）

A．-2 或 $-\frac{1}{2}$　B．-2 或 $\frac{1}{2}$

C．2 或 $-\frac{1}{2}$　D．2 或 $\frac{1}{2}$

5．（本题 4 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=\sqrt{13}$，$b=\sqrt{3}$，$c=2$，则角 $A=$（　）

A．$30°$　B．$60°$　C．$120°$　D．$150°$

6．（本题 4 分）已知 $a=\log_4 2$，$b=\log_{10} 4$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.2}$，则下列判断正确的是（　）

A．$c<b<a$　B．$b<a<c$　C．$a<c<b$　D．$a<b<c$

7．（本题 4 分）“$x<-1$”是“$x^2+x>0$”的．

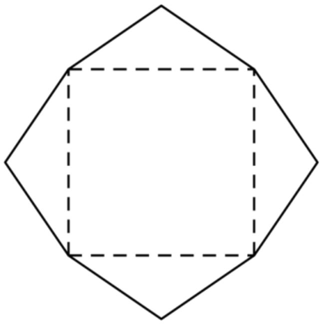
A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

8．（本题 4 分）在 ΔABC 中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$，则角 A 是

A．钝角　B．直角　C．锐角　D．不能确定

9．（本题 4 分）某班设计了一个八边形的班徽（如图），它由腰长为 1，顶角为 α 的四个等腰三角形，及其底边构成的正方形所组成，该八边形的面积为



A．$2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$；　　　　B．$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+3$

C．$3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+1$　　　　D．$2\sin\alpha-\cos\alpha+1$

10.（本题4分）在当前市场经济条件下，私营个体商店中的商品，所标价格a与其实际价值之间，存在着相当大的差距，对顾客而言，总是希望通过“讨价还价”来减少商品所标价格a与其实际价值的差距.设顾客第n次的还价为b_n，商家第n次的讨价为c_n，有一种“对半讨价还价”法如下：顾客第一次的还价为标价a的一半，即第一次还价$b_1=\dfrac{a}{2}$，商家第一次的讨价为b_1与标价a的平均值，即$c_1=\dfrac{a+b_1}{2}$；…，顾客第n次的还价为上一次商家的讨价c_{n-1}与顾客的还价b_{n-1}的平均值，即$b_n=\dfrac{c_{n-1}+b_{n-1}}{2}$，商家第$n$次讨价为上一次商家的讨价$c_{n-1}$与顾客这一次的还价$b_n$的平均值，即$c_n=\dfrac{c_{n-1}+b_n}{2}$，现有一件衣服标价1200元，若经过$n$次的“对半讨价还价”，$b_n$与$c_n$相差不到2元，则$n$的最小值为（　　）

A．4　　　　B．5　　　　C．6　　　　D．7

二、填空题（共25分）

11.（本题5分）函数$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{2-x}$的定义域为_____.

12.（本题5分）半径为6，圆心角等于$\dfrac{\pi}{3}$的扇形的面积是____.

13.（本题5分）若将函数$f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$的函数图象平移$\varphi(\varphi\in R)$个单位，得到一个偶函数的图象，则$|\varphi|$的最小值为____.

14.（本题5分）点P从$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$出发，沿单位圆$x^2+y^2=1$逆时针方向运动$\dfrac{\pi}{3}$弧长到达$Q$点，则点$Q$的坐标为_____.

15.（本题5分）已知函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，给出下列结论：

①$(1,+\infty)$是$f(x)$的单调递减区间；

②当$k\in(-\infty,\dfrac{1}{e})$时，直线y=k与y=f（x）的图象有两个不同交点；

③函数y=f（x）的图象与$y=x^2+1$的图象没有公共点；

④当$x\in(0,+\infty)$时，函数$y=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$的最小值为2.

其中正确结论的序号是

三、解答题（共 85 分）

16．（本题 14 分）已知数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$a_3=6, a_1, a_2, a_4$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\dfrac{2}{a_n a_{n+1}}$，设数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求$S_n$.

17．（本题 14 分）已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos x$.

(1)求$f(x)$的最小正周期；

(2)求$f(x)$图象的对称轴方程；

(3)求$f(x)$在$[-\pi, 0]$上的最大值和最小值.

18．（本题 14 分）设函数$f(x)=x\left(x^2-3x+a\right)$，$a\in\mathrm{R}$

(1)当$a=-9$时，求函数$f(x)$的单调增区间；

(2)若函数$f(x)$在区间$(1,2)$上为减函数，求a的取值范围；

(3)若函数在区间$(0,2)$内存在两个极值点x_1，x_2，且$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>\left|f(x_1)+f(x_2)\right|$，直接写出$a$的取值范围.

19．（本题 14 分）在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{6}$.

(1)求$\angle BAC$的大小；

(2)E是AC的中点.从条件①$BE=\sqrt{7}$，条件②$a+b+c=4+2\sqrt{3}$，条件③$c=\sqrt{2}b$中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，求$\triangle ABC$的面积；

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个个解答计分.

20．（本题 15 分）已知函数$f(x)=(1+\dfrac{a}{x})\mathrm{e}^x$，其中$a>0$.

（I）求函数$f(x)$的零点；

（II）讨论$y=f(x)$在区间$(-\infty,0)$上的单调性；

（III）在区间$(-\infty,-\dfrac{a}{2}]$上，$f(x)$是否存在最小值？若存在，求出最小值；若不存在，请说明理由.

21．（本题 14 分）在无穷数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，对于任意$n\in\mathrm{N}^*$，都有$a_n\in\mathrm{N}^*$，$a_n<a_{n+1}$. 设$m\in\mathrm{N}^*$，记使得$a_n\le m$成立的n的最大值为b_m.

(1)设数列$\{a_n\}$为$1,4,7,10,\cdots$，写出b_1，b_2，b_3，b_4的值；

(2)若$\{a_n\}$为等比数列，且$a_2=2$，求$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{50}$的值.

(3)设$a_p=q$，$a_1+a_2+\cdots+a_p=A$，直接写出$b_1+b_2+\cdots+b_q$的值.（用p，q，A表示）

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	A	D	D	D	A	C	A	B

1．A

【解析】直接利用集合的并集运算求解.

【详解】因为集合 $A=\{0,1,3\}$， $B=\{-1,0,2,3\}$，

所以 $A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$，

故选：A

2．D

【分析】根据函数的单调性和奇偶性，对各个选项中的函数逐一做出判断，从而得出结论.

【详解】解：由于函数 $y=x+1$ 是非奇非偶函数，故排除 A；

由于 $y=\frac{1}{x}$ 在（－∞，0）∪（0，+∞）上不具有单调性，故排除 B；

由于 $y=-x^3$ 是奇函数，且在 **R** 上是减函数，故排除 C；

A，B，C 都不对，

对于 D，$y=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$，数形结合可知函数在 R 递增且为奇函数；

故选 D.

【点睛】本题主要考查函数的单调性和奇偶性，熟练掌握常见函数的图像与性质是解题的关键，属于基础题.

3．A

【分析】根据余弦两角和公式和同角三角函数关系求解即可.

【详解】因为 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$， $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

所以 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

故选：A

4．D

【分析】设出公比，利用等比数列通项公式基本量计算列出方程，求出答案

【详解】设公比为 q，则 $a_1+a_3=\frac{a_2}{q}+a_2q=\frac{2}{q}+2q=5$，

解得 $q=2$ 或 $\frac{1}{2}$.

故选：D

5．D

【分析】根据余弦定理即可求解.

【详解】由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{3+4-13}{2\times\sqrt{3}\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because A\in(0,\pi),\therefore A=\dfrac{5\pi}{6}$，即 150°，

故选：D

6．D

【分析】根据指对数的函数性质判断各数的大小关系.

【详解】$c=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-0.2}>1=\log_{10}10>b=\log_{10}4>\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}=\log_4 2=a$，

故选：D

7．A

【详解】试题分析：$x^2+x>0\therefore x>0或x<-1$，所以“$x<-1$”是“$x^2+x>0$”的充分而不必要条件

考点：充分条件与必要条件

8．C

【分析】首先利用正弦定理角化边，然后结合余弦定理确定$\angle A$的大小即可.

【详解】由 $sin^2A+sin^2B<sin^2C$ 结合正弦定理可得：$a^2+b^2<c^2$，则 $a^2+b^2-c^2<0$

结合余弦定理有：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，故$\angle C$为钝角，则角 A 是锐角.

本题选择 C 选项.

【点睛】在处理三角形中的边角关系时，一般全部化为角的关系，或全部化为边的关系．题中若出现边的一次式一般采用到正弦定理，出现边的二次式一般采用到余弦定理．应用正、余弦定理时，注意公式变式的应用．解决三角形问题时，注意角的限制范围.

9．A

【详解】试题分析：利用余弦定理求出正方形面积 $S_1=\left(1^2+1^2-2\cos\alpha\right)=2-2\cos\alpha$；利用三角形知识得出四个等腰三角形面积 $S_2=4\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\alpha=2\sin\alpha$；故八边形面积 $S=S_1+S_2=2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$.故本题正确答案为 A.

考点：余弦定理和三角形面积的求解.

【方法点睛】本题是一道关于三角函数在几何中的应用的题目，掌握正余弦定理是解题的关键；首先根据三角形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$ 求出 4 个三角形的面积 $4S=2\sin\alpha$；接下来利用余弦定理可求出正方形的边长的平方 $\left(1^2+1^2-2\cos\alpha\right)$，进而得到正方形的面积 $S_1=\left(1^2+1^2-2\cos\alpha\right)=2-2\cos\alpha$，最后得到答案.

10．B

【分析】判断出数列$\{c_n - b_n\}$是等比数列，由此列不等式，从而求得n的最小值.

【详解】依题意可知$c_n > b_n$，

$$c_n - b_n = \frac{c_{n-1}+b_n}{2} - \frac{c_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{b_n - b_{n-1}}{2} = \frac{\frac{c_{n-1}+b_{n-1}}{2} - b_{n-1}}{2} = \frac{c_{n-1}-b_{n-1}}{4},$$

则$\frac{c_n - b_n}{c_{n-1}-b_{n-1}} = \frac{1}{4}$，又$c_1 - b_1 = \frac{a+b_1}{2} - b_1 = \frac{1200+600}{2} - 600 = 300$，

所以数列$\{c_n - b_n\}$是以300为首项，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，

所以$c_n - b_n = 300\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 1200\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

由$c_n - b_n = 1200\times\left(\frac{1}{4}\right)^n < 2$得$\left(\frac{1}{4}\right)^n \left\langle \frac{1}{600}, 4^n \right\rangle 600$，其中$n \in \mathbf{N}^*$，

解得$n \geq 5$，因此n的最小值为5.

故选：B.

11．$[1,2)\cup(2,+\infty)$

【分析】根据函数定义域的求法求得正确答案.

【详解】依题意，$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\neq 0 \end{cases}$，解得$x\geq 1$且$x\neq 2$，

所以$f(x)$的定义域为$[1,2)\cup(2,+\infty)$.

故答案为：$[1,2)\cup(2,+\infty)$

12．6π

【分析】由扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha r^2$即可直接计算求解.

【详解】由题得扇形的面积是$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 6^2=6\pi$.

故答案为：6π.

13．$\frac{\pi}{6}$

【解析】分两种情况讨论，先求出φ的值，再比较即得解$|\varphi|$的最小值.

【详解】若将函数$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$的函数图象向左平移$\varphi(\varphi\in R)$个单位，得到函数$y=\sin(x+\varphi-\frac{\pi}{3})$的图象，

根据所得图象为一个偶函数的图象，故$\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，此时，$\varphi=k\pi+\frac{5\pi}{6}$；

若将函数$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$的函数图象向右平移$\varphi(\varphi\in R)$个单位，得到函数$y=\sin(x-\varphi-\frac{\pi}{3})$的图象，

根据所得图象为一个偶函数的图象，故$\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，此时，$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$；

综上可得，$|\varphi|$的最小值为$\frac{\pi}{6}$，

故答案为：$\frac{\pi}{6}$.

【点睛】本题主要考查函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变换规律及正弦函数的奇偶性，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

14．$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$

【分析】由题意先求出$\angle POx$的正弦值、余弦值，再根据条件得到$\angle QOx=\angle POx+\frac{\pi}{3}$，再根据两角和的正弦、余弦公式求出$\angle QOx$的正弦值、余弦值，然后求出点$Q$的坐标.

【详解】解：∵点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$在单位圆$x^2+y^2=1$上，

∴$\sin\angle POx=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\angle POx=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∵点P沿单位圆逆时针方向运动$\frac{\pi}{3}$弧长到达Q点，

∴点P逆时针转动了$\frac{\pi}{3}$，则$\angle QOx=\angle POx+\frac{\pi}{3}$，

∴$\sin\angle QOx=\sin\left(\angle POx+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\angle POx\cos\frac{\pi}{3}+\cos\angle POx\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

$\cos\angle QOx=\cos\left(\angle POx+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\angle POx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\angle POx\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

∴点Q的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$，

故答案为：$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$.

【点睛】本题主要考查三角函数的定义以及两角和的正余弦公式，属于基础题.

15．①③

【分析】①先求出函数的导数，令导函数小于0，解出即可判断；②根据函数的单调性画出函数的图象，通过图象读出即可；③求出f（x）的最大值小于$y=x^2+1$的最小值，从而得到答案；④利用对勾函数即可作出判断.

【详解】解：①f'（x）$=\frac{1-x}{e^x}$，令f'（x）<0，解得：x>1，

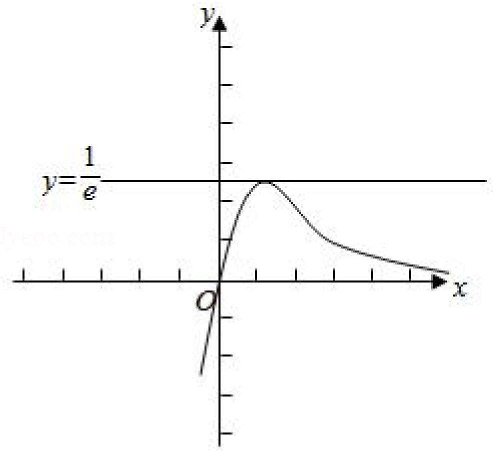
∴函数f（x）在（1，+∞）递减，故①正确；

②∵f（x）在（-∞，1）递增，在（1，+∞）递减，

∴f（x）max=f（1）$=\frac{1}{e}$，

$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to0$，

画出函数$f(x)$的图象，如图示：



，

∴当$k\in(-\infty,0)$时，直线$y=k$与$y=f(x)$的图象有1个不同交点，

当$k\in(0,\frac{1}{e})$时，直线$y=k$与$y=f(x)$的图象有两个不同交点，故②错误；

③函数$f(x)\le\frac{1}{e}$，而$y=x^2+1\geqslant1$，

∴函数$y=f(x)$的图象与$y=x^2+1$的图象没有公共点，故③正确；

④当$x\in(0,+\infty)$时，令t=$f(x)\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$，

$y=f(x)+\frac{1}{f(x)}=t+\frac{1}{t}$在$\left(0,\frac{1}{e}\right]$上单调递减，

∴ $y=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge e+\frac{1}{e}$，最小值不等于2，故④错误.

故答案为①③.

【点睛】本题考查了函数的单调性、最值问题，考查导数的应用，是一道中档题.

16．(1) $a_n=2n$

(2) $S_n=\frac{n}{2n+2}$

【分析】(1)根据等差数列的通项公式及等比中项列出方程组求出首项与公差，即可得解；

(2)利用裂项相消法求和.

【详解】(1)因为$a_3=6,a_1,a_2,a_4$成等比数列，

所以$\begin{cases}a_3=a_1+2d=6\\(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$，

所以$a_n=2+2(n-1)=2n$.

(2)因为$b_n=\frac{2}{a_na_{n+1}}$，

所以$b_n=\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$，

所以$S_n=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$，

所以$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}=\frac{n}{2n+2}$.

17．(1) 2π

(2) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$

(3) $f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$， $f(x)_{\max}=1$.

【分析】（1）利用辅助角公式可将化简$f(x)$，从而求得其最小周期；

（2）利用整体代入法求得$f(x)$图象的对称轴方程，从而得解；

（3）利用正弦函数的性质，结合整体法即可得解.

【详解】（1）因为$f(x)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)+2\cos x$

$=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$f(x)$的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$；

（2）令$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，得$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$；

（3）因为$x\in[-\pi,0]$，所以$x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，

注意到$y=\sin x$在$\left[-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，

而$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$，$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}$，

所以$f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，$f(x)_{\max}=1$.

18．(1) $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.

(2) $a\le 0$

(3) $0<a<\frac{9}{4}$

【分析】(1)把$a=-9$代入求导，再求出导函数大于0的不等式解集即可；

(2)由函数$f(x)$的导函数在$(1,2)$上恒小于等于0即可出a的范围；

(3)根据给定条件可得函数$f(x)$在区间$(0,2)$内的两个极值一正一负，再列出不等式求解即得.

【详解】（1）当 $a=-9$ 时，$f(x)=x(x^2-3x-9)$，则 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，由 $f'(x)>0$ 解得：$x<-1$ 或 $x>3$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.

（2）函数 $f(x)=x(x^2-3x+a)$，则 $f^{'}(x)=3x^2-6x+a$，因函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,2\right)$ 上为减函数，则 $\forall x\in(1,2)$，$f^{'}(x)\le 0$ 成立，

即 $\forall x\in(1,2)$，$3x^2-6x+a\le 0\Leftrightarrow a\le -3x^2+6x$，显然 $-3x^2+6x$ 在 $\left(1,2\right)$ 上单调递减，即 $\forall x\in(1,2)$，$-3x^2+6x>0$，则 $a\le 0$，

所以 a 的取值范围是 $a\le 0$.

（3）由(2)知，$f^{'}(x)=3x^2-6x+a$，因函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,2\right)$ 内存在两个极值点 x_1，x_2，则 $f'(x)=0$ 在区间 $\left(0,2\right)$ 内有两个不等根 x_1，x_2，

即有 $\begin{cases} f'(0)=f'(2)=a>0 \\ f'(1)=-3+a<0 \end{cases}$，解得 $0<a<3$，且有 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\dfrac{a}{3}$，

不妨令 $0<x_1<x_2<2$，则 $f'(x)=3(x-x_1)(x-x_2)$，当 $0<x<x_1$ 或 $x_2<x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f\left(x\right)$ 在 x_1 处取得极大值 $f(x_1)$，在 x_2 取得极小值 $f(x_2)$，显然，$f(x_1)>f(x_2)$，

由 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|>\left|f(x_1)+f(x_2)\right|$ 两边平方得 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，

而 $f(x_1)\cdot f(x_2)=x_1(x_1^2-3x_1+a)\cdot x_2(x_2^2-3x_2+a)<0$，即 $(x_1^2-3x_1+a)(x_2^2-3x_2+a)<0$，

整理得：$(x_1x_2)^2-3x_1x_2(x_1+x_2)+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+9x_1x_2-3a(x_1+x_2)+a^2<0$，

把 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\dfrac{a}{3}$ 代入上述不等式并整理得：$\dfrac{4}{9}a^2-a<0$，解得 $0<a<\dfrac{9}{4}$，

综上得 $0<a<\dfrac{9}{4}$，

所以实数 a 的取值范围是 $0<a<\dfrac{9}{4}$.

【点睛】含有多个变量的处理方法是减少变量的个数，减少变量方法有：

（1）若这些变量之间有关系可以用它们之间的关系消元，如在本题中不等式 $(x_1^2-3x_1+a)(x_2^2-3x_2+a)<0$ 含有三个变量，可以通过韦达定理 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\dfrac{a}{3}$ 代入的办法消去 x_1，x_2，只剩下关系 a 的不等式.

（2）若这些变量之间没有关系可以通过构造比值或差值消元，如证明不等式 $\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时可变形为 $\dfrac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}<\dfrac{\frac{x_1}{x_2}+1}{2}$ 后构造 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$ 消元，只剩下关于 t 的不等式；证明不等式 $\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ 时可变形为 $\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1-x_2}+1}{2}$ 后构造 $t=x_1-x_2$ 消元，只剩下关于 t 的不等式.

19．(1) $\frac{2\pi}{3}$

(2)答案见解析

【分析】（1）根据题意利用正余弦定理分析求解；

（2）对于①：在$\triangle BCE$，利用余弦定理求得$c=2$，进而可得面积；对于②：根据（1）中边的关系分析可得$b=2$，进而可得面积；对于③：根据（1）中边的关系分析判断；

【详解】（1）因为$\sin A=\sqrt{3}\sin B$，由正弦定理可得$a=\sqrt{3}b$，

又因为$C=\frac{\pi}{6}$，

由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=3b^2+b^2-2\sqrt{3}b^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=b^2$，

即$c=b$，则$B=C=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle BAC=\pi-(B+C)=\frac{2\pi}{3}$.

（2）对于①：AB边上的中线长为$BE=\sqrt{7}$，

在$\triangle BCE$，由余弦定理得$BE^2=BC^2+CE^2-2BC\cdot CE\cdot\cos C$

即$\left(\sqrt{7}\right)^2=3b^2+\frac{b^2}{4}-2\times\sqrt{3}b\times\frac{b}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$b=2$，

则$b=c=2,a=2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$；

对于②：因为$a+b+c=\sqrt{3}b+b+b=4+2\sqrt{3}$，解得$b=2$，

则$b=c=2,a=2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$；

对于③：若$c=\sqrt{2}b$，这与$b=c$相矛盾，不合题意；

20．(1) 函数$f(x)$的零点为$-a$.

(2) 在区间$(-\infty,\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$上$f(x)$是增函数，在区间$(\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2},0)$上$f(x)$是减函数

(3)见解析.

【详解】(I) 解$f(x)=0$，得$x=-a$，所以函数$f(x)$的零点为$-a$

（II）函数$f(x)$在区域（$-\infty$，0）上有意义，$f'(x)=\frac{x^2+ax-a}{x^2}e^x$，

令$f'(x)=0$，得$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2}$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$，

因为$a>0$，所以$x_1<0,x_2>0$.

当x在定义域上变化时，$f'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, 0)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

所以在区间$(-\infty, \frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2})$上$f(x)$是增函数，

在区间$(\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2}, 0)$上$f(x)$是减函数.

（III）在区间$\left(-\infty, -\frac{a}{2}\right]$上$f(x)$存在最小值$f(-\frac{a}{2})$

证明：由（I）知-a是函数$f(x)$的零点，

因为$-a-x_1=-a-\frac{-a-\sqrt{a^2+4a}}{2}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4a}}{2}>0$

所以$x_1<-a<0$.

由$f(x)=(1+\frac{a}{x})e^x$知，当$x<-a$时，$f(x)>0$.

又函数在$(x_1,0)$上是减函数，

且$x_1<-a<-\frac{a}{2}<0$.

所以函数在区间$\left(x_1,-\frac{a}{2}\right)$上的最小值为$f(-\frac{a}{2})$，且$f(-\frac{a}{2})<0$.

计算得$f(-\frac{a}{2})=-e^{-\frac{a}{2}}$.

21．(1)$b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=2$

(2)243；

(3)$b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$

【分析】（1）根据使得$a_n<a_{n+1}$成立的n的最大值为b_m，结合数列$\{a_n\}$为$1,4,7,10,\cdots$，分析即可；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，先判断$a_n\geq n$，再证明$a_n\leq n$，即可求出所有可能的数列$\{a_n\}$；

（3）确定$b_1=1$，$b_2=b_3=2$，依此类推，发现规律，得出b_q，从而求出$b_1+b_2+\cdots+b_q$的值.

【详解】（1）由使得$a_n<a_{n+1}$成立的n的最大值为b_m，数列$\{a_n\}$为$1,4,7,10,\cdots$，

得$a_n\leq1$，则$b_1=1$，

$a_n\leq2$，则$b_2=1$，

$a_n\leq3$，则$b_3=1$，

$a_n\leq4$，则$b_4=2$，

所以 $b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=2$；

（2）$\because \{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_2=2$，$\therefore a_n=2^{n-1}$，

所以 $a_3=4, a_4=8, a_5=16, a_6=32, a_7=64$，

$\because$ 使得 $a_n \le m$ 成立的 n 的最大值为 b_m，

$\therefore b_1=1$，$b_2=b_3=2$，$b_4=b_5=b_6=b_7=3$，$b_8=b_9=\cdots=b_{15}=4$，

$b_{16}=b_{17}=\cdots=b_{31}=5$，$b_{32}=b_{33}=\cdots=b_{50}=6$，

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{50}=1+2\times2+4\times3+8\times4+16\times5+19\times6=243$；

（3）设 $a_2=k(k>1)$，

因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$，

所以 $b_1=b_2=\cdots=b_{k-1}=1$，且 $b_k=2$，

所以数列$\{b_n\}$中等于 1 的项有 $k-1$ 个，即 a_2-a_1 个，

设 $a_3=l(l>k)$，

则 $b_k=b_{k+1}=\cdots=b_{l-1}=2$，且 $b_l=3$，

所以数列$\{b_n\}$中等于 2 的项有 $l-k$ 个，即 a_3-a_2 个，

以此类推，数列$\{b_n\}$中等于 $p-1$ 的项有 a_p-a_{p-1} 个.，

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_q=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+(p-1)(a_p-a_{p-1})+p$

$=-a_1-a_2-\cdots-a_{p-1}+(p-1)a_p+p$

$=pa_p+p-(a_1+a_2+\cdots+a_{p-1}+a_p)$

$=p(q+1)-A$，

即 $b_1+b_2+\cdots+b_q=p(q+1)-A$.

【点睛】关键点点睛：本题巧妙得将数列和不等关系融合在一起，理解题目所表达得具体含义是解决本题得关键.