北京市和平街第一中学高三数学月考试卷（2024.9.29）

（考试时间 120 分钟，满分 150 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 设全集 U=R，集合 $A=\{x\mid x<2\},B=\{x\mid x<1\}$ 则集合（ C_UA）∪B=

A (-∞,2)　　B [2,+∞]　　C (1,2)　　D (-∞,1)∪[2,+∞]

2.设 $x\in\mathbf{R}$，向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. 10

3.若复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}$ 的实部与虚部相等，则实数 a 的值为

A. －3　　B. －1　　C. 1　　D. 3

4.在下列函数中，值域为 R 的偶函数是

A. $f(x)=\sqrt{x}$　　B. $f(x)=ln|x|$　　C. $f(x)=2^x+2^{-x}$　　D. $f(x)=xcosx$

5.《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种.这五种规格党旗的长 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 (单位:cm)成等差数列，对应的宽为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 (单位: cm),且长与宽之比都相等，已知 $a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则 $b_3=$

A. 64　　B. 96　　C. 128　　D. 160

6.在△ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，若 E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{CE}=$（　）

A. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且其夹角为 θ，则“$|\vec{a}-\vec{b}|>1$”是“$\theta\in(\frac{\pi}{3},\pi]$”的

A 充分不必要条件　　B 必要不充分条件

C 充分必要条件　　D 既不充分也不必要条件

8. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$，若存在非零实数 x_0，使函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上均有零点，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的一个“折点”．下列四个函数存在“折点”的是

A $f(x)=3^{|x-1|}+2$　　　　B $f(x)=\lg(|x|+2021)$

C $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x-1$　　　　D $f(x)=x^2-2mx-1$

9. 把液体 A 放在冷空气中冷却，如果液体 A 原来的温度是 $\theta_1{}^\circ\mathrm{C}$，空气的温度是 $\theta_0{}^\circ\mathrm{C}$，则 t min 后液体 A 的温度 $\theta{}^\circ\mathrm{C}$ 可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-0.3t}$ 求得. 把温度是 $62^\circ\mathrm{C}$ 的液体 A 放在 $15^\circ\mathrm{C}$ 的空气中冷却，液体 A 的温度冷却到 $51^\circ\mathrm{C}$ 和 $27^\circ\mathrm{C}$ 所用时间分别为 t_1 min，t_2 min，则 t_2-t_1 的值约为　（参考数据 $\ln 3\approx 1.10$）

A　2.7　　　B　3.7　　　C　4.7　　　D　5.7

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, x<1\\ \ln x, x\ge 1\end{cases}$，若不等式 $f(x)\le|x-k|$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是（　）

$A.(-\infty,1]$　　　$B.[1,\infty)$　　　$C.[0,1)$　　　$D.(-1,0]$

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

11．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+1)}+\sqrt{2-x}$ 的定义域为_________.

12．已知 S_n 为递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，其中 a_1，$\dfrac{9}{2}$，a_4 成等差数列，且 $a_2\cdot a_3=8$，则 $S_5=$______.

13．边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=$_______；若点 H 是线段 AP 上的动点，则 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}$ 的取值范围是_________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\geqslant a,\\ -x^2+2a, x<a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性，则 a 的取值范围是____________.

15.已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{2023}<S_{2024}<S_{2022}$. 数列$\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$的前$n$项和为$T_n$.

给出下列四个结论:

①$a_{2023}<0$；　　　　②$a_{2022}a_{2023}>a_{2024}a_{2025}$；

③使$S_n<0$成立的n的最大值为4048；　　　　④当$n=2023$时，T_n取得最小值.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题（共6小题，共85分）

16.（本小题14分）　已知函数$f(x)=\sin x(\sqrt{3}\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调递增区间;

（Ⅱ）令$g(x)=af(x)+b,x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，其中 $a>0$.若$g(x)$的值域为$[2,5]$，求a和b的值.

17.（本小题13分）　已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，其前n项和为S_n，$a_2=9$，$S_3=39$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（II）若数列$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为3的等差数列，求数列$\{b_n\}$的通项公式及前n项和T_n.

18.（本小题13分）　在$\triangle ABC$中，$c=2$，$C=30°$．再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使其能够确定唯一的三角形，求：

（Ⅰ）a的值;

（Ⅱ）$\triangle ABC$的面积.

条件①：$2b=\sqrt{3}a$；

条件②：$A=45°$；

条件③：$b=2\sqrt{3}$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本小题 15 分）　某市 A，B 两所中学的学生组队参加信息联赛，A 中学推荐了 3 名男生、2 名女生。B 中学推荐了 3 名男生、4 名女生。两校所推荐的学生一起参加集训.由于集训后队员水平相当，从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队参赛.

（Ⅰ）求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率；

（Ⅱ）设 X 表示 A 中学参赛的男生人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知 3 名男生的比赛成绩分别为 76,80,84，3 名女生的比赛成绩分别为 77, a（$a \in \mathbf{N}^*$）,81，若 3 名男生的比赛成绩的方差大于 3 名女生的比赛成绩的方差，写出 a 的取值范围（不要求过程）.

20（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-e^x$，设 $h(x)=f'(x)$.

（Ⅰ）若 $a=\dfrac{e}{2}$，求 $h(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在极小值 m，

（i） 求 a 的取值范围；

（ii）证明：$m>-a$.

21（本小题 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$，给出以下定义：

对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n+a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为"$\mathbf{T}$ 数列"；特别地，对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $a_n+a_{n+2}>2a_{n+1}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为"严格 $\mathbf{T}$ 数列".

（I）已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n, B_n，且 $a_n=2n-1$，$b_n=-2^{n-1}$，试判断数列 $\{A_n\}$，数列 $\{B_n\}$ 是否为"$\mathbf{T}$ 数列"，并说明理由；

（II）证明：数列 $\{a_n\}$ 为"$\mathbf{T}$ 数列"的充要条件是"对于任意的 $k,m,n \in \mathbf{N}^*$，当 $k<m<n$ 时，有 $(n-m)a_k+(m-k)a_n \geqslant (n-k)a_m$"；

（III）已知数列 $\{b_n\}$ 为"严格 $\mathbf{T}$ 数列"，且任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，$b_n \in \mathbf{Z}$，$b_1=-8$，$b_{128}=-8$.求数列 $\{b_n\}$ 的最小项的最大值.