北大附中 2025 届 10 月阶段检测

数学

本试卷满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束，试卷和答题卡一并收回。

考号：____________________ 姓名：____________________

第一部分 选择题（每题 4 分，共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2-5x+4\le 0\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{1,2\}$　　（B）$\{1,2,3,4\}$　　（C）$\{3\}$　　（D）$\{3,4\}$

（2）已知 $\dfrac{z}{1+2\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，i 为虚数单位，则 $z=$

（A）$2+\mathrm{i}$　　（B）$2-\mathrm{i}$　　（C）$-2+\mathrm{i}$　　（D）$-2-\mathrm{i}$

（3）已知 $a=0.2^3$，$b=\log_3 0.2$，$c=2^{0.2}$，则

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$　　（C）$a<c<b$　　（D）$c<a<b$

（4）若函数 $f(x)=3\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图象与直线 $y=3$ 的两个相邻公共点之间的距离等于 2，则 $f(x)$ 对称中心到对称轴距离的最小值为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{4}$

（5）对任意实数 α,β，“$\cos\alpha+\sin\beta=0$”是“$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则对 $\forall x\in D$，下列函数中满足 $f(-x)+f(x)=0$ 的是

（A）$f(x)=\lg|x|$　　（B）$f(x)=-x^2+\sin x+1$

（C）$f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}-\dfrac{1}{2}$　　（D）$f(x)=\dfrac{e^x-x}{x+1}$

（7）函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & -2\le x\le 0\\ 2-x, & 0<x\le 2\end{cases}$，则不等式 $f(x)>\tan\dfrac{\pi}{4}x$ 的解集是

（A）$(-2,0)$　　（B）$(-1,2)$　　（C）$(0,1)$　　（D）$(-2,1)$

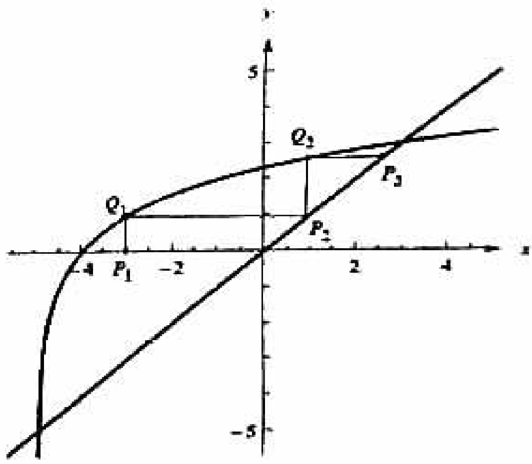
（8）"三斜求积术"是我国宋代的数学家秦九韶用实例的形式提出的，其实质是根据三角形的三边长 a,b,c 求三角形面积 S，即 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$．已知△$ABC$ 满足 $\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，且其面积为 $10\sqrt{3}$，则△ABC 的周长是

（A）10　　（B）15　　（C）20　　（D）40

（9）已知函数 $f(x)=|x^3-3x^2+a|$，记 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值为 $M(a)$．当 $M(a)$ 取最小值时，a 等于

（A）-2　　（B）2　　（C）-3　　（D）3

（10）如图，已知直线 $y=x$ 和曲线 $C:y=\log_2(x+5)$．在 x 轴上取点 P_1，过 P_1 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q_1，过 Q_1 作平行于 x 轴的直线交直线 $y=x$ 于点 P_2；再过 P_2 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q_2，过 Q_2 作平行于 x 轴的直线交直线 $y=x$ 于点 P_3……以点 $P_1,P_2,P_3,\cdots$ 的横坐标依次构成数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots$，若数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项，且对于常数 M 存在正整数 N 使得当 $n>N$ 时恒有 $|a_n-M|<10^{-10}$，则称数列 $\{a_n\}$ 靠拢在 M 附近．



对于点 P_1 横坐标的下列取值：①-4，②0，③-6，④10，能够使所得数列 $\{x_n\}$ 靠拢在 3 附近的是

（A）①②　　（B）②④　　（C）①②④　　（D）①③④

第二部分 非选择题（共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\sqrt{\lg x-1}$ 的定义域为________.

（12）若函数 $f(x)=A\sin x+\cos x$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$，则 $A=$________，$f(\frac{\pi}{12})=$________.

（13）在 ΔABC 中，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，使 ΔABC 存在的一个 $\angle B$ 的值为________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2, x<a\\ \log_a x, \quad x\geq a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的取值范围是________.

（15）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{e^x+e^{-x}}$，给出下列四个结论：

① 当 $a>0,b=0$ 时，$f(x)$ 存在最小值；

② 当 $a>0,b=0$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③ 当 $a>0$ 时，存在 $b>0$，使得 $f(x)$ 恰有 2 个极值点；

④ 当 $a>0$ 时，存在 $b>0$，使得 $f(x)$ 恰有 3 个极值点.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x-\frac{\pi}{6})+1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值和最小值.

（17）（本小题 14 分）

已知 ΔABC 中，$a\cos B>c$，$b=2$.

（Ⅰ）求证：A 是钝角；

（Ⅱ）请从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一，求 ΔABC 的周长.

① $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$；②$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$；③$a=2\sqrt{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得分为 0；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x-x^a$，其中 $a\in\{-2,-1,1,2\}$.

（Ⅰ）若函数 $y=f(x)$ 在定义域上是增函数，写出 a 的值；

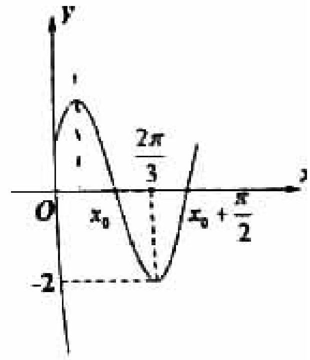
（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，

① 设函数 $g(x)=f'(x)$，证明：$g(x)$ 存在唯一极值点；

② 判断曲线 $y=f(x)$ 是否存在两条互相垂直的切线，并说明理由.

（19）（本小题 14 分）

已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R})$，其中 $A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)$ 的部分图象如下图所示：



（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 时，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 恰有两个不同的零点 x_1 和 x_2，求 m 的取值范围及对应的 x_1+x_2 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{1-x}+a(x+1)+bx^3$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $b=1$，且 $f'(x)\geq 1$，求 a 的最小值；

（Ⅲ）若 $f(x)>-2$ 的解集为 $\{x\mid 0<x<1\}$，求 b 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，满足 $a_1=1, a_2=\lambda,\ a_{n+2}=\dfrac{2}{a_{n+1}+a_n}$，其中常数 $\lambda\geq 0$.

（Ⅰ）若 $a_4=\dfrac{5}{11}$，求 λ 的值；

（Ⅱ）若 $\lambda\neq 1$，证明：存在无限个 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k>1$；

（Ⅲ）证明：存在 $M>0$，对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k<M$.