



## 2024-2025 学年度第一学期高二数学 10 月月考 (2024.10)

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

1. 已知点  $P(3, -1, -2)$ , 则点  $P$  关于  $z$  轴的对称点的坐标为 ( )

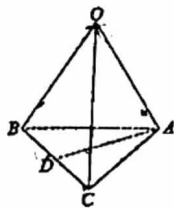
- A.  $(3, 1, -2)$     B.  $(-3, 1, 2)$     C.  $(-3, -1, -2)$     D.  $(-3, 1, -2)$

2. 已知向量  $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-3, x, y)$ , 且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 那么  $|\vec{b}| = ( )$

- A.  $3\sqrt{6}$     B. 6    C. 9    D. 18

3. 如图, 在三棱锥  $O-ABC$  中,  $D$  是  $BC$  的中点, 若  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ , 则  $\vec{AD}$  等于 ( )

- A.  $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$     B.  $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$   
 C.  $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$     D.  $-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

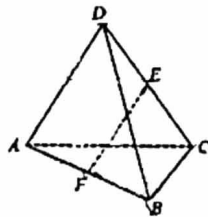


4. 已知正四棱锥  $S-ABCD$ , 底面边长是 2, 体积是  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ , 那么这个四棱锥的侧棱长为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$     B. 2    C.  $\sqrt{5}$     D.  $2\sqrt{2}$

5. 如图, 在三棱锥  $D-ABC$  中,  $AC = BD$ , 且  $AC \perp BD$ ,  $E, F$  分别是棱  $DC, AB$  的中点, 则  $EF$  和  $AC$  所成的角等于 ( )

- A.  $30^\circ$     B.  $45^\circ$   
 C.  $60^\circ$     D.  $90^\circ$



6. 已知  $m, n$  是两条不重合的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题, 其中正确的是 ( )

①若  $m \perp \alpha$ ,  $m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;

②若  $\alpha \perp \gamma$ ,  $\beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;

③若  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \beta$ ,  $m \parallel n$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;

④若  $m, n$  是异面直线,  $m \subset \alpha$ ,  $m \parallel \beta$ ,  $n \subset \beta$ ,  $n \parallel \alpha$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .

- A. ①和②    B. ①和③    C. ③和④    D. ①和④

7. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 直线  $l$  是底面  $ABCD$  所在平面内的一条动直线, 记直线  $A_1C$  与直线  $l$  所成角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha$  的最小值是 ( )

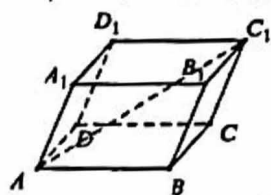
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     B.  $\frac{1}{2}$     C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$



8. 如图，在平行六面体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=AD=1$ ， $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 45^\circ$ ， $AA_1 = \sqrt{2}$ ， $\angle BAD = 60^\circ$

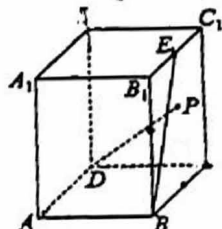
则  $|\overline{AC_1}| = ( )$

- A. 1                                      B.  $\sqrt{3}$   
C. 9                                        D. 3



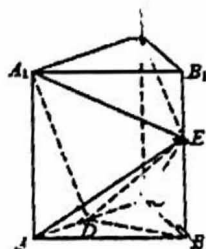
9. 如图，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=3, BC=CC_1=4$ ， $E$  为棱  $B_1C_1$  的中点， $P$  为四边形  $BCC_1B_1$  内（含边界）的一个动点，且  $DP \perp BE$ ，则动点  $P$  的轨迹长度为  $( )$

- A. 5                                        B.  $2\sqrt{5}$   
C.  $4\sqrt{2}$                                 D.  $\sqrt{13}$



10. 如图，在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AC \perp BC, AC=2, BC=1, AA_1=2$ ，点  $D$  在棱  $AC$  上，点  $E$  在棱  $BB_1$  上，下列结论中不正确的是  $( )$

- A. 三棱锥  $E-ABD$  的体积的最大值为  $\frac{2}{3}$   
B. 点  $E$  到平面  $ACC_1A_1$  的距离为 1  
C. 点  $D$  到直线  $C_1E$  的距离的最小值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$   
D.  $A_1D + DB$  的最小值为  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$



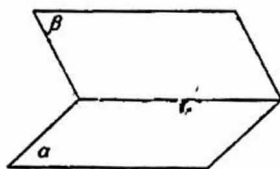
二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.)

11. 已知向量  $\vec{a} = (-2, 5, 4)$ ， $\vec{b} = (6, 0, x)$ ，若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

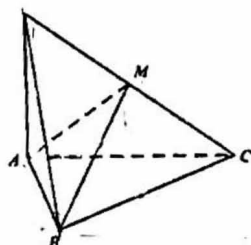
12. 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1，则点  $C_1$  到直线  $BD_1$  的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 如图， $60^\circ$  的二面角的棱上有  $A, B$  两点，线段  $AC, BD$  分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于  $AB$ 。已知  $AB=4, AC=6, BD=8$ ，则  $CD$  的长为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 在我国古代数学名著《九章算术》中，四个面都为直角三角形的三棱锥称为鳖臑。已知在鳖臑  $P-ABC$  中， $PA \perp$  平面  $ABC, PA=AB=BC=2$ 。  $M$  为  $PC$  的中点，则点  $P$  到平面  $MAB$  的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



第 13 题图

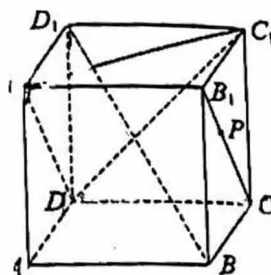


第 14 题图



15. 如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  在棱  $B_1C_1$  上运动, 则下列结论正确的是\_\_\_\_\_.

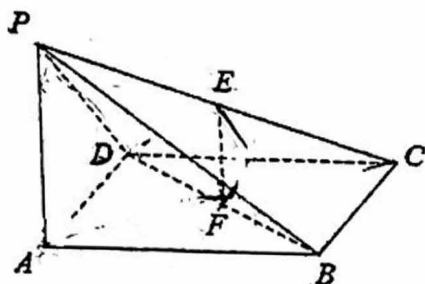
- ①直线  $BD_1 \perp$  平面  $A_1C_1D_1$ ;
- ②三棱锥  $D-A_1C_1P$  的体积为定值;
- ③异面直线  $AP$  与  $A_1D$  所成角的取值范围是  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ ;
- ④直线  $C_1P$  与平面  $A_1C_1D$  所成角的正弦值的最大值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .



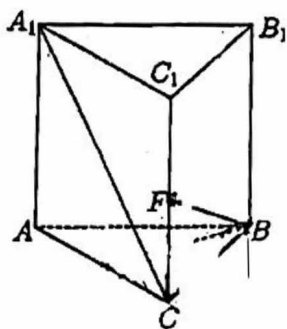
三、解答题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.)

16. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是平行四边形,  $E, F$  分别为  $PC, BD$  的中点.

- (1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $PAD$ ;
- (2) 若  $PA \perp AD, AB \perp$  平面  $PAD$ , 求证:  $EF \perp$  平面  $ABCD$ .



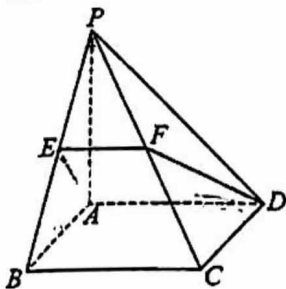
17. 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=BC=AA_1=2$ ,  $E, F$  分别为  $AC, CC_1$  的中点,  $BF \perp A_1B_1$ .



- (1) 求证:  $BE \perp A_1C$ ;
- (2) 求直线  $A_1C$  与平面  $ABB_1A_1$  所成角的正弦值.
- (3) 求点  $A_1$  到平面  $BEF$  的距离.



18. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形, 侧面  $PAD$  为等腰直角三角形, 且  $\angle PAD = \frac{\pi}{2}$ , 点  $F$  为棱  $PC$  上的点, 平面  $ADF$  与棱  $PB$  交于点  $E$ .



(1) 求证:  $EF \parallel AD$ ;

(2) 从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知, 求平面  $PCD$  与平面  $ADFE$  所成锐二面角的大小.

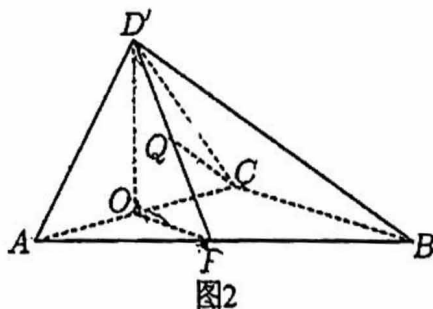
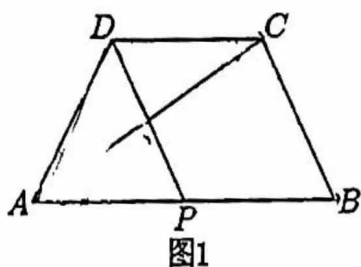
条件①:  $AE = \sqrt{2}$ ;

条件②: 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ;

条件③:  $PB \perp FD$ .

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (2) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $AB = 2AD = 2CD = 4$ ,  $P$  为  $AB$  的中点, 线段  $AC$  与  $DP$  交于  $O$  点 (如图 1). 将  $\triangle ACD$  沿  $AC$  折起到  $\triangle ACD'$  位置, 使得  $D'O \perp OP$  (如图 2).



(1) 求证: 平面  $D'AC \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 线段  $PD'$  上是否存在点  $Q$ , 使得  $CQ$  与平面  $BCD'$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ? 若存在, 求出  $\frac{PQ}{PD'}$  的值; 若不存在,

请说明理由.