

数学

(清华附中初 22 级) 2024.10



一. 选择题 (本题共 24 分, 每小题 3 分)

第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 下面四个标志中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



2. 用配方法解方程 $x^2+6x-1=0$, 变形后结果正确的是 ()

- A. $(x+3)^2=10$ B. $(x+3)^2=7$ C. $(x-3)^2=10$ D. $(x-3)^2=7$

3. 如果两个相似三角形的面积之比为 9:4, 那么这两个三角形的周长之比为 ()

- A. 81:16 B. 27:12 C. 9:4 D. 3:2

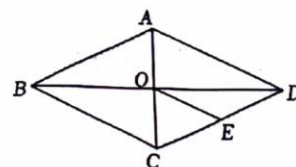
4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y=3x^2$ 先向右平移 4 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 得到的抛物线是 ()

- A. $y=3(x-4)^2-1$ B. $y=3(x-4)^2+1$ C. $y=3(x+4)^2-1$ D. $y=3(x+4)^2+1$

5. 如果 $M(-1, y_1)$, $N(2, y_2)$ 是正比例函数 $y=kx$ 的图象上的两点, 且 $y_1 > y_2$. 那么符合题意的 k 的值可能是 ()

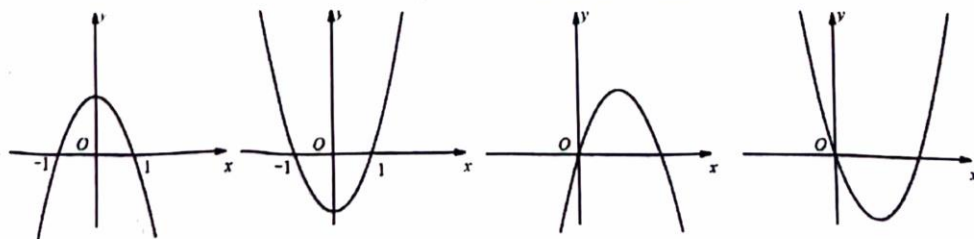
- A. -2 B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3

6. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=66^\circ$, 对角线 AC, BD 交于点 O , E 为 CD 的中点, 连接 OE , 则 $\angle AOE$ 的度数为 ()



- A. 114° B. 120° C. 123° D. 147°

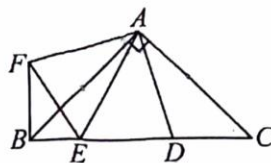
7. 已知当 $b > 0$ 时, 二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象是下列四个图中的一个:



根据图象分析, a 的值等于 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

8. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 、 E 是斜边 BC 上两点, 将 $\triangle ACD$ 绕点 A 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ABF$, 连接 EF , 若 $\triangle AED \cong \triangle AEF$, 下列结论:



- ① $\angle DAE=45^\circ$; ② $\triangle ABD \sim \triangle EAF$; ③ $BE+CD=DE$;
④ $BE^2+CD^2=DE^2$. 其中正确的是 ()

A. ①②③ B. ②③④ C. ①② D. ①②④

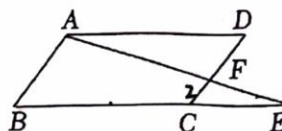


二. 填空题 (本题共 24 分, 每小题 3 分)

9. 在平面直角坐标系中, 点 $(-3, 4)$ 关于原点对称的点的坐标是_____.

10. 二次函数 $y=-2x^2+4x-6$ 的最大值是_____.

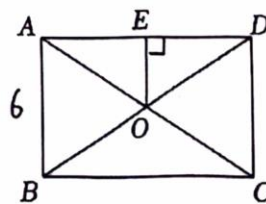
11. 如图, $\square ABCD$ 中, 延长 BC 至 E , 使得 $CE=\frac{1}{2}BC$, 若 $CF=2$, 则 DF 的长为_____.



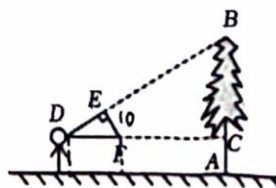
12. 2022 至 2024 年, 某城市居民人均可支配收入由 6.58 万元增长至 7.96 万元. 设人均可支配收入的平均增长率为 x , 根据题意列出方程得_____.

13. 已知点 $P(-1, y_1)$, $Q(3, y_2)$ 在一次函数 $y=kx+1$ ($k \neq 0$) 的图象上, 且 $y_1 < y_2$, 则 k 的值可以是_____ (写出一个即可).

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 过点 O 作 $OE \perp AD$, 垂足为 E , 若 $AB=6$, 则 OE 的长为_____.



15. 如图, 小明同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB , 他调整自己的位置, 设法使斜边 DF 保持水平, 并且边 DE 与点 B 在同一直线上. 已知纸板的两条直角边 $DE=20\text{cm}$, $EF=10\text{cm}$, 测得边 DF 离地面的高度 $AC=1.5\text{m}$, $CD=6\text{m}$, 则树高 AB 是_____m.



16. 某酒店在客人退房后清洁客房需打扫卫生、整理床铺、更换客用物品、检查设备共四个步骤. 某清洁小组有甲、乙、丙三名工作人员, 工作要求如下:

①“打扫卫生”只能由甲完成; 每间客房“打扫卫生”完成后, 才能进行该客房的其他三个步骤, 这三个步骤可由任意工作人员完成并可同时进行;

②一个步骤只能由一名工作人员完成, 此步骤完成后该工作人员才能进行其他步骤;

③每个步骤所需时间如表所示:

步骤	打扫卫生	整理床铺	更换客用物品	检查设备
所需时间/分钟	10	8	6	5

在不考虑其他因素的前提下, 若由甲单独完成一间客房的清洁工作, 需要 _____ 分钟;

若由甲、乙、丙合作完成四间客房的清洁工作, 则最少需要 _____ 分钟.

三. 解答题 (本题共 72 分, 其中 17、18、19、21、22、23 题每小题 5 分, 20、26 题每小题 6 分, 25、26 题每小题 7 分, 27、28 题每小题 8 分)

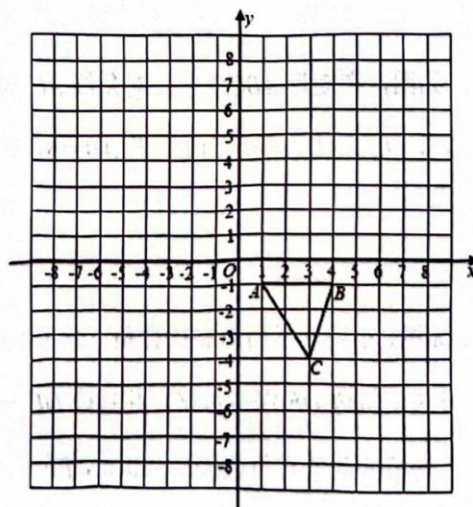
17. 解方程: $x^2 - 5x + 2 = 0$.



18. 如图, $\triangle ABC$ 顶点的坐标分别为 $A(1, -1)$, $B(4, -1)$, $C(3, -4)$.

(1) 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 后, 得到 $\triangle AB_1C_1$. 在所给的直角坐标系中画出旋转后的 $\triangle AB_1C_1$, 并直接写出点 B_1 的坐标 _____;

(2) 以坐标原点 O 为位似中心, 在第二象限内再画一个放大的 $\triangle A_2B_2C_2$, 使得它与 $\triangle ABC$ 的位似比等于 2:1.



19. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表:

x	...	-3	-2	-1	0	1	...
$y=ax^2+bx+c$...	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	4	m	...

根据以上列表, 回答下列问题:

- (1) 直接写出 c, m 的值;
- (2) 求此二次函数的解析式.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+3)x + m + 2 = 0$.

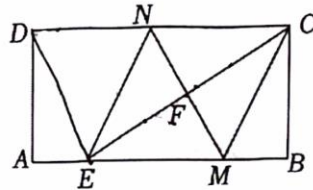
- (1) 求证: 无论实数 m 取何值, 方程总有两个实数根;
- (2) 若方程两个根均为正整数, 求负整数 m 的值.



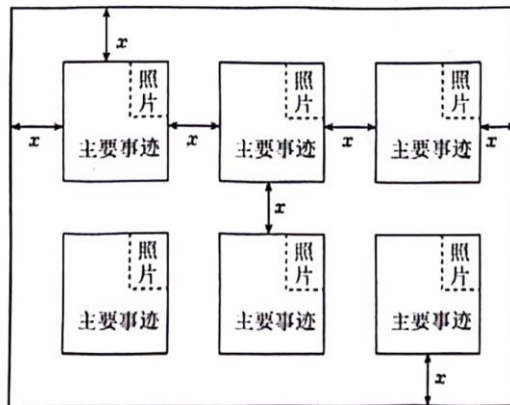
21. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 AB 上任意一点, 连接 CE ,

点 F 为 CE 的中点, 过点 F 作 $MN \perp CE$, MN 与 AB, CD 分别相交于点 M, N , 连接 CM, EN .

- (1) 求证: 四边形 $CNEM$ 为菱形;
- (2) 若 $AB=10, AD=4$, 当 $AE=2$ 时, 求 EM 的长.



22. 如图, 某班级门口有一块长为 20 厘米、宽为 15 厘米的小型长方形优秀事迹展板, 展板上粘贴上下左右对齐两排的 6 个长方形且面积都为 18 平方厘米的班级学生主要事迹贴纸, 若要求学生的主要事迹贴纸之间以及到上下左右的宽度都相等 (设为 x 厘米), 如图所示, 求宽度 x .

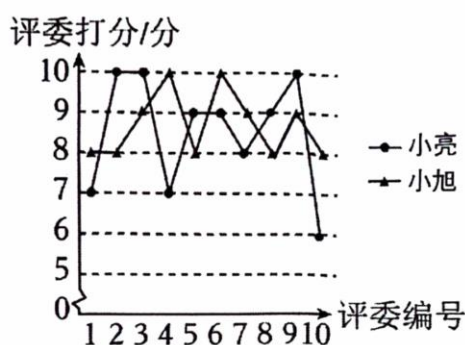


23. 某高校要选派一位同学去参加首都高校校园文化演讲, 为了选出综合素质最高的一名同学进行演讲, 先对所有报名的同学进行了笔试, 再对笔试 90 分以上 (含 90 分) 的同学进行面试. 小强、小亮、小旭三位同学脱颖而出, 他们的笔试成绩 (满分 100) 分别是 98, 94, 90. 之后组织了十位评委对小强、小亮、小旭三位同学面试表现进行打分, 每位评委最高打 10 分, 面试成绩等于各位评委打分之总和. 之后对这三位同学的面试的数据进行整理、描述和分析, 下面给出了部分信息.

a. 评委给小强同学打分如下:

10, 10, 9, 8, 8, 8, 7, 7, 6, 6

b. 评委给小亮、小旭两位同学打分的折线图如下图:



c. 小强、小亮、小旭三位同学面试情况统计表:

同学	评委打分中位数	面试成绩
小强	8	m
小亮	n	85
小旭	8.5	87

根据以上信息, 回答下列问题:

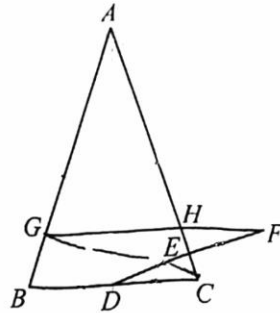
(1) 直接写出表中 m, n 的值;

(2) 在面试中, 如果评委给某个同学的打分的方差越小, 则认为评委对该同学面试的评价越一致. 据此推断: 小强、小亮、小旭三位同学中, 评委对 _____ 的评价更一致 (填“小强”、“小亮”或“小旭”);

(3) 在笔试和面试两项成绩中, 按笔试成绩占 40%, 面试成绩占 60%, 计算小强、小亮、小旭的综合成绩, 综合成绩最高的是 _____ (填“小强”、“小亮”或“小旭”).

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 为 BC 中点, 作点 D 关于线段 AC 的对称点 F , 连接 DF 交 AC 于 E , 过点 F 作 $FG \parallel BC$ 交 AC 、 AB 于 H 、 G .

- (1) 求证: $CE=EH$;
 (2) 若 $BC=3$, $CE=1$, 求 GH 的长.

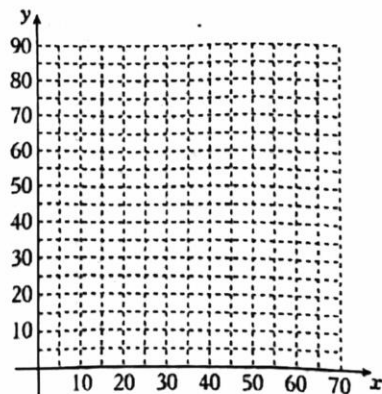


25. “夏至”是二十四节气的第十个节气,《恪遵宪度》中解释道:“日北至,日长之至,日影短至,故曰夏至.至者,极也.”夏至入节的时间为每年公历的6月21日或6月22日.

某小组通过学习、查找文献,得到了夏至日正午(中午12时),在北半球不同纬度的地方,100cm高的物体的影长和纬度的相关数据.记纬度为 x (单位:度),影长为 y (单位:cm), x 与 y 的部分数据如表

x	0	5	15	23.5	25	35	45	55	65
y	43.5	33.4	15.0	0	2.6	20.3	39.4	61.3	88.5

- (1) 通过分析如表数据,发现可以用函数刻画纬度 x 和影长 y 之间的关系.在平面直角坐标系 xOy 中,画出此函数的图象;
 (2) 北京地区位于大约北纬40度,在夏至日正午,100cm高的物体的影长约为 _____ cm (精确到0.1);
 (3) 小红与小明是好朋友,他们生活在北半球不同纬度的地区,在夏至日正午,他们测量了100cm高的物体的影长均为40cm,那么他们生活的地区纬度差约是 _____ 度.



26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=ax^2-2mx-1$ 经过点 $P(-1, 2m-2)$,

(1) 求 a 的值;

(2) 已知点 $A(-m-1, y_1)$, $B(2m+4, y_2)$ 在此抛物线上, 当 $-1 < m < 1$ 时, 比较 $y_1, y_2, -1$ 的大小, 并说明理由.



27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=\alpha$, P 为线段 BC 上的动点 (不与点 C 重合), 将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 α 得到线段 AQ .

(1) 如图 1, 当 P 是 BC 中点时, 连接 BQ , 求证: $BP=BQ$;

(2) 过点 Q 作直线 $QM \parallel AC$, 交直线 BC 于点 M , 在射线 MB 上取一点 N , 使得 $MN=2CP$, 连接 QN . 请补全图 2, 直接写出 $\angle MQN$ 的大小并证明.

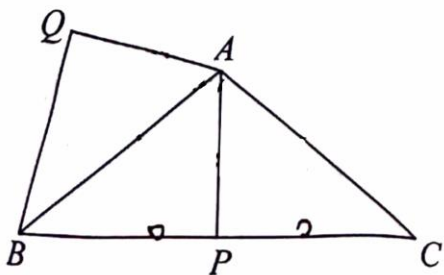


图 1

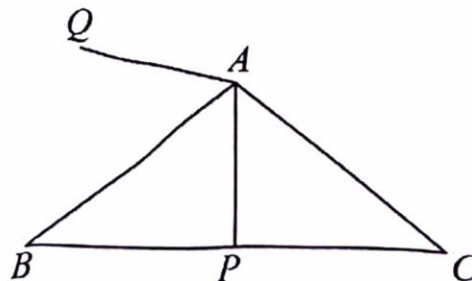


图 2

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, Q 是 x 轴正半轴上一点, 对于四边形 $ABCD$ 边上的点 P 和图形 W (点 P 不在 x 轴上), 给出如下定义: 若 $\angle POQ = \alpha$, 将图形 W 绕点 P 逆时针旋转 α 得到图形 M , 则称图形 M 是图形 W 和点 P 的“关联图”.

如图, 点 $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$.

(1) 点 $N_1(-1,2)$, $N_2(2,2)$, $N_3(1, \frac{3}{2})$, $N_4(2, \sqrt{3})$ 中, 在四边形 $ABCD$ 和点 $E(0,1)$ 的“关联图”上的点是_____;

(2) 已知点 $F(\frac{1}{2}, 0)$, $G(t, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

①若线段 OF 关于点 P 的“关联图”在四边形 $ABCD$ 的内部 (包含边界), 设点 P 的横坐标的最小值为 m , 纵坐标的最大值为 n , 直接写出 $n-m$ 的值_____;

②当 $\triangle OFG$ 关于点 P 的“关联图”和 $\triangle OFG$ 都在四边形 $ABCD$ 的内部 (包含边界) 时, 锐角 α 的最大值是 60° , 请直接写出 t 的取值范围_____.

