2024北京和平街一中高一9月月考

数 学

2024-9-30

一、选择题（每小题5分，共50分.选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x|-2<x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（ ）.

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$1<f(x_0)\leqslant 2$"的否定形式是（ ）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$1<f(x)\leqslant 2$　　B. $\exists x_0\notin\mathbf{R}$，$1<f(x_0)\leqslant 2$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant 1$ 或 $f(x)>2$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)\leqslant 1$ 或 $f(x_0)>2$

3. 若集合 $X=\{x|x<1\}$，下列关系式中成立的是（ ）

A. $0\subseteq X$　　B. $\{0\}\subseteq X$　　C. $\varnothing\in X$　　D. $\{0\}\in X$

4. 设 x，$y\in\mathbf{R}$，则"$x<1$ 且 $y<1$"是"$x+y<2$"的（ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知函数 $y=2x^2+2x+1$，则当 $-1\le x\le 1$ 时，y 的最大值和最小值分别是（　 ）

A. 5，$\frac{1}{2}$　　B. 5，1　　C. 5，$\frac{1}{4}$　　D. 1，$\frac{1}{2}$

6. 对于实数 a，b，c 下列命题中的真命题是（ ）

A. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　B. 若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. 若 $a<b<0$，则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. 若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$

7. 若集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是（　 ）

A. $1<a<2$　　B. $1\le a\le 2$　　C. $1<a<3$　　D. $1\le a\le 3$

8. 已知方程 $x^2-4x+a=0$ 的两根都大于1，则 a 的取值范围是（ ）

A. $3<a\le 4$　　B. $1<a\le 4$

C. $a>1$　　D. $a\le 4$

9. 已知 $a>0$，且 $a^2-b+4=0$，则 $\frac{a}{a+b}$ 有（ ）

A. 最大值 $\frac{1}{5}$　　B. 最小值 $\frac{1}{5}$　　C. 最大值 $\frac{1}{4}$　　D. 最小值 $\frac{1}{4}$

10. 若关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中恰有两个整数，则实数 a 的取值范围是

A. $\{a|3<a<4\}$　　B. $\{a|-2<a<-1$ 或 $3<a<4\}$

C. $\{a|3<a\leqslant 4\}$　　D. $\{a|-2\leqslant a<-1$ 或 $3<a\leqslant 4\}$

二、填空题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填在答题卡上.）

11. 集合 $A=\{x\,|\,x\geq 1\}$，$B=\{x\,|\,x\leq a\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是__________

12. 不等式 $\frac{3-x}{x+4}\leq 0$ 的解集是__________.

13. 已知 $x\geq 0$，$y\geq 0$，$x+2y=1$，则 xy 的最大值是______.

14. 已知命题 p：$a\leq x\leq a+1$，命题 q：$x^2-4x<0$，若 p 是 q 成立的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是______.

15. 当两个集合中有一个集合为另一个集合的子集时，称两个集合之间构成“全食”；当两个集合有公共元素，但互不为对方子集时，称两个集合之间构成“偏食”，对于集合 $A=\left\{-1,\frac{1}{2},1\right\}$，$B=\left\{x\,|\,x^2=a\right\}$. 若 A 与 B 构成“全食”，则 a 的取值范围是______；若 A 与 B 构成“偏食”，则 a 的取值范围是______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-5x-6<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|m+1\leq x\leq 2m-1,m\in R\right\}$.

（1）若 $m=4$，求集合 $\complement_R A$，集合 $A\cup\complement_R B$；

（2）若 $A\bigcup B=A$，求实数 m 的取值范围.

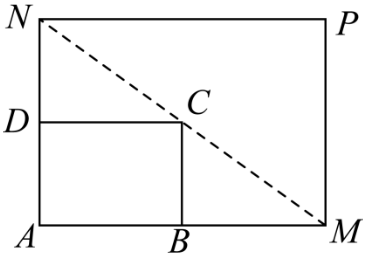
17. 解关于 x 的不等式：$ax^2+(a-2)x-2\geq 0\,(a\in\mathbf{R})$.

18. 已知函数 $y=(k-1)x^2+(k-3)x+1$

（1）若关于x的不等式 $(k-1)x^2+(k-3)x+1\geq 0$ 的解集为全体实数 $\mathbf{R}$，求实数 k 的取值范围

（2）若关于x的方程 $(k-1)x^2+(k-3)x+1=0$ 的两根为 x_1，x_2，且 $x_1<2$，$x_2<2$，求实数 k 的取值范围

19. 如图所示，将一个矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求 M 在射线 AB 上，N 在射线 AD 上，且对角线 MN 过 C 点·已知 $AB=4$ 米，$AD=3$ 米，设 AN 的长为 $x\,(x>3)$ 米·



（1）要使矩形 $AMPN$ 的面积大于 54 平方米，则 AN 的长应在什么范围内？

（2）求当 AM，AN 的长度分别是多少时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小，并求出此最小值；

20. 对于集合 A ，定义 $g_A(x)=\begin{cases}1, x\notin A\\ -1, x\in A\end{cases}$.对于两个集合 A 、 B，定义运算 $A*B=\{x|g_A(x)\cdot g_B(x)=-1\}$.

（1）若 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,3,4,5\}$，写出 $g_A(1)$ 与 $g_B(1)$ 的值，并求出 $A*B$；

（2）证明：$g_{A*B}(x)=g_A(x)\cdot g_B(x)$；

参考答案

一、选择题（每小题5分，共50分.选出符合题目要求的一项）

1.【答案】C

【分析】直接根据交集的运算即可得出答案.

【详解】解：因为 $A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x|-2<x\le 1\}$，

所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

故选：C

2.【答案】C

【分析】直接根据特称命题的否定为全称命题，写出答案.

【详解】由于特称命题的否定是全称命题，则命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$1<f(x_0)\le 2$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\le 1$或$f(x)>2$”.

故选：C

3.【答案】B

【分析】根据元素与集合，集合与集合之间关系即可判断.

【详解】对A，元素与集合间不能使用“$\subseteq$”，故A错误，

对B，因为 $X=\{x|x<1\}$，所以 $\{0\}\subseteq X$，故B正确；

对C,D，集合与集合之间不能使用“$\in$”符号，故CD错误；

故选：B.

4.【答案】A

【分析】依据“$x<1$且$y<1$”与“$x+y<2$”之间的逻辑关系进行推导即可解决.

【详解】由$x<1$且$y<1$，可得$x+y<2$

当$x=2$，$y=-1$时，满足$x+y<2$，但不满足$x<1$且$y<1$

则“$x<1$且$y<1$”是“$x+y<2$”的充分不必要条件

故选：A

5.【答案】A

【分析】利用二次函数的性质，结合闭区间求最值即可.

【详解】由 $y=2x^2+2x+1=2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，开口向上且对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，

又 $-1\le x\le 1$，故当 x=1 有最大值为5，当 $x=-\frac{1}{2}$ 有最小值为 $\frac{1}{2}$.

故选：A

6.【答案】D

【分析】通过不等式的性质一一验证即可.

【详解】对于选项 A：若 $a>b$，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，故选项 A 错误；

对于选项 B：若 $a>b>0$，可得 $\frac{b-a}{ab}<0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故选项 B 错误；

对于选项 C：若 $a<b<0$，则 $a^2>b^2$，则 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，故选项 C 错误；

对于选项 D：若 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $\frac{b-a}{ab}>0$，又$\because a>b$，则 $a>0$，$b<0$，故选项 D 正确；

故选：D

7.【答案】B

【分析】首先解一元二次不等式求出集合 A，再分 $a<0$、$a=0$、$a>0$ 三种情况分别求出集合 B，根据 $A\subseteq B$ 得到不等式组，即可求出参数a的取值范围.

【详解】解：由 $x^2-5x+6<0$，即$(x-2)(x-3)<0$，解得 $2<x<3$，

所以 $A=\left\{x\,|\,x^2-5x+6<0\right\}=\left\{x\,|\,2<x<3\right\}$，

又 $B=\left\{x\,|\,x^2-4ax+3a^2<0\right\}=\left\{x\,|\,(x-3a)(x-a)<0\right\}$，

因为 $A\subseteq B$，

当 $a<0$ 时 $B=\left\{x\,|\,(x-3a)(x-a)<0\right\}=\left\{x\,|\,3a<x<a\right\}$，显然不满足题意，

当 $a=0$ 时 $B=\left\{x\,|\,(x-3a)(x-a)<0\right\}=\varnothing$，也不符合题意，

当 $a>0$ 时 $B=\left\{x\,|\,(x-3a)(x-a)<0\right\}=\left\{x\,|\,a<x<3a\right\}$，

所以$\begin{cases}3a\geq 3\\ a\leq 2\end{cases}$，解得$1\leq a\leq 2$；

故选：B

8.【答案】A

【分析】由已知可得判别式$\Delta\geq 0$，再借助韦达定理及两根都大于 1 的条件列出不等式，求解即得.

【详解】设方程 $x^2-4x+a=0$ 的两根为 x_1,x_2，依题意有：$\begin{cases}\Delta=16-4a\geq 0\\ x_1+x_2=4\\ x_1x_2=a\end{cases}$，

因 x_1,x_2 都大于 1，则 $x_1+x_2>2$，且 $(x_1-1)(x_2-1)>0$，显然 $x_1+x_2>2$ 成立，

由 $(x_1-1)(x_2-1)>0$ 得 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0$，则有 $a-4+1>0$，解得 $a>3$，

由 $\Delta=16-4a\geq 0$ 解得：$a\leq 4$，于是得 $3<a\leq 4$，

所以 a 的取值范围是 $3<a\leq 4$.

故选：A

9.【答案】A

【分析】根据题意可得到$\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{1}{a+\dfrac{4}{a}+1}$，从而利用基本不等式即可求出$\dfrac{a}{a+b}$的最大值.

【详解】因为$a^2-b+4=0$，所以$b=a^2+4$，

所以$\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a}{a+a^2+4}=\dfrac{1}{a+\dfrac{4}{a}+1}$，

因为$a>0$，所以$a+\dfrac{4}{a}+1\geq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}+1=5$，当且仅当$a=\dfrac{4}{a}$，即$a=2$时等号成立，

所以$\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{1}{a+\dfrac{4}{a}+1}\leq\dfrac{1}{5}$，当且仅当$a=2$时等号成立.

故选：A.

10.【答案】D

【分析】根据含参的一元二次不等式的解法，分类讨论求出不等式的解集，然后分析该集合中能含有哪两个整数，即可求出实数a的取值范围.

【详解】由题意得，原不等式可转化为$(x-1)(x-a)<0$. 当$a>1$时，解得$1<x<a$，此时解集中的整数为2，3，则$3<a\leqslant 4$；当$a<1$时，解得$a<x<1$，此时解集中的整数为0，-1，则$-2\leqslant a<-1$. 当$a=1$时，不符合题意. 故实数a的取值范围是$\{a\,|-2\leqslant a<-1$或$3<a\leqslant 4\}$，故选D.

【点睛】本题主要考查含参的一元二次不等式的解法，意在考查学生的分类讨论意识和逻辑推理能力.

二、填空题：（本大题共6小题，每小题5分，共25分.把答案填在答题卡上.）

11.【答案】$[1,+\infty)$

【分析】由$A\cup B=\mathbf{R}$，易得$a\geq 1$。

【详解】由$A\cup B=\mathbf{R}$，可知$a\geq 1$。

故答案为：$[1,+\infty)$

【点睛】此题考查通过集合的并集求参数，属于简单题目。

12.【答案】$(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$

【分析】根据分式不等式的解法求得正确答案.

【详解】$\dfrac{3-x}{x+4}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)(x+4)\leq 0\\ x+4\neq 0\end{cases}$，解得$x<-4$或$x\geq 3$，

所以不等式的解集为$(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$

13.【答案】$\dfrac{1}{8}$

【分析】利用配凑法将 xy 化成 $\frac{1}{2}x\cdot(2y)$，再利用基本不等式求最大值.

【详解】$\because xy=\frac{1}{2}x\cdot(2y)\le\frac{1}{2}(\frac{x+2y}{2})^2=\frac{1}{8}$，等号成立当且仅当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{4}$，

$\therefore xy$ 的最大值是 $\frac{1}{8}$.

故答案为：$\frac{1}{8}$.

【点睛】本题考查基本不等式的应用，考查运算求解能力，求解时注意配凑法的应用.

14.【答案】$\left(0,3\right)$

【分析】设 $A=\left\{x\,|\,a\le x\le a+1\right\}$，不等式 $x^2-4x<0$ 的解集为集合 B，根据题意 A 是 B 的真子集，可得关于 a 的不等式即可求解.

【详解】因为命题 p：$a\le x\le a+1$，设集合 $A=\left\{x\,|\,a\le x\le a+1\right\}$，

由 $x^2-4x<0$ 可得 $0<x<4$，设集合 $B=\left\{x\,|\,0<x<4\right\}$，

因为 p 是 q 成立的充分不必要条件，所以 A 是 B 的真子集，

所以 $\begin{cases}a>0\\a+1<4\end{cases}$ 解得：$0<a<3$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,3\right)$，

故答案为：$\left(0,3\right)$.

15.【答案】 ①. $\left\{a\,|\,a<0\text{或}a=1\right\}$ ②. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

【分析】分情况解集合 B，再根据“全食”与“偏食”的概念分析集合中元素满足的关系列式求解即可.

【详解】由 $B=\left\{x\,|\,x^2=a\right\}$ 可知，当 $a<0$ 时，$B=\varnothing$，此时 $B\subseteq A$；

当 $a=0$ 时，$B=\left\{0\right\}$，此时 $A\cap B=\varnothing$，

当 $a>0$ 时，$B=\left\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\right\}$；

又 $A=\left\{-1,\frac{1}{2},1\right\}$，若 A 与 B 构成“全食”，则 $B\subseteq A$，

当 $a<0$ 时，满足题意；当 $a=0$ 时，不合题意；

当 $a>0$ 时，要使 $B\subseteq A$，则 $B=\left\{-1,1\right\}$，即 $\sqrt{a}=1$，解得 $a=1$；

综上，A 与 B 构成“全食”时，a 的取值范围是 $\left\{a\,|\,a<0\text{或}a=1\right\}$；

若 A 与 B 构成“偏食”时，显然 $a\le 0$ 时，不满足题意，

当 $a>0$ 时，由 $A\cap B\neq\varnothing$，所以 $B=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$，即 $\sqrt{a}=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{4}$，

此时 a 的取值范围是 $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

故答案为：$\{a\,|\,a<0\text{或}a=1\}$；$\left\{\frac{1}{4}\right\}$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【答案】（1）$\complement_R A=\left\{x\middle|x\leq -1\text{或}x\geq 6\right\}$，$A\cup\complement_R B=\left\{x\middle|x\langle 6\text{或}x\rangle 7\right\}$；（2）$\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$.

【分析】

（1）首先解一元二次不等式求出集合 A，再根据补集的定义求出 $\complement_R A$、$\complement_{\mathrm{R}} B$，最后根据并集的定义计算可得；

（2）由 $A\cup B=A$，可得 $B\subseteq A$，即可得到不等式组，解得即可.

【详解】解：（1）因为 $A=\left\{x\middle|x^2-5x-6<0\right\}$，所以 $A=\left\{x\middle|-1<x<6\right\}$，

$\complement_R A=\{x\,|\,x\leq -1\text{ 或 }x\geq 6\}$.

当 $m=4$ 时，$B=\left\{x\middle|5\leq x\leq 7\right\}$

所以 $\complement_R B=\{x\,|\,x<5\text{ 或 }x>7\}$.

所以 $A\cup\complement_R B=\{x\,|\,x<6\text{ 或 }x>7\}$.

（2）因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，则 $m<2$ ；

当 $B\neq\varnothing$ 时，由题意得 $\begin{cases}2m-1\geq m+1\\2m-1<6\\m+1>-1\end{cases}$，

解得 $2\leq m<\frac{7}{2}$.

综上，实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$.

【点睛】求集合的基本运算时，要认清集合元素的属性(是点集、数集或其他情形)和化简集合，这是正确求解集合运算的两个先决条件.

17.【答案】答案见解析

【分析】分 $a=0$，$a>0$ 和 $a<0$ 三种情况，在 $a<0$ 时，再分三种情况，求出不等式解集.

【详解】①当 $a=0$ 时，原不等式化为 $x+1\leq 0$，解得 $x\leq -1$.

②当 $a>0$ 时，原不等式化为 $\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x+1)\geq 0$，解得 $x\geq\dfrac{2}{a}$ 或 $x\leq -1$.

③当 $a<0$ 时，原不等式化为 $\left(x-\dfrac{2}{a}\right)(x+1)\leq 0$.

当 $\dfrac{2}{a}>-1$，即 $a<-2$ 时，解得 $-1\leq x\leq\dfrac{2}{a}$；

当 $\dfrac{2}{a}=-1$，即 $a=-2$ 时，解得 $x=-1$ 满足题意；

当 $\dfrac{2}{a}<-1$，即 $-2<a<0$ 时，解得 $\dfrac{2}{a}\leq x\leq -1$.

综上所述，当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x\leq -1\}$；

当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|x\geq\dfrac{2}{a}\text{或}x\leq -1\right\}$；

当 $-2<a<0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|\dfrac{2}{a}\leq x\leq -1\right\}$；

当 $a=-2$ 时，不等式的解集为 $\{-1\}$；

当 $a<-2$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|-1\leq x\leq\dfrac{2}{a}\right\}$.

18.【答案】（1）$\left[5-2\sqrt{3},5+2\sqrt{3}\right]$

（2）$\{k\,|\,k<1$ 或 $\dfrac{3}{2}<k\leq 5-2\sqrt{3}$ 或 $k\geq 5+2\sqrt{3}\}$

【分析】（1）讨论 $k-1$ 是否为零，从而分别求解不等式；从而得到实数 k 的取值范围；

（2）由题意得 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\(x_1-2)\cdot(x_2-2)>0\\(x_1-2)+(x_2-2)<0\end{cases}$，结合韦达定理 $x_1+x_2=-\dfrac{k-3}{k-1}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k-1}$ 得 $\begin{cases}k^2-10k+13\geq 0\\\dfrac{1}{k-1}+2\dfrac{k-3}{k-1}+4>0\\-\dfrac{k-3}{k-1}-4<0\end{cases}$，

从而解得.

【小问 1 详解】

解：①当 $k=1$ 时，不等式可化为 $-2x+1\geq 0$，

解得 $x\leq\dfrac{1}{2}$，故不成立；

②当 $k\neq 1$ 时，

$\because (k-1)x^2+(k-3)x+1\geq 0$ 的解集为全体实数 $\mathbf{R}$，

$\therefore \begin{cases} k-1>0 \\ (k-3)^2-4(k-1)\le 0 \end{cases}$，

解得 $5-2\sqrt{3}\le k\le 5+2\sqrt{3}$，

综上所述，实数 k 的取值范围为 $\left[5-2\sqrt{3},5+2\sqrt{3}\right]$；

【小问 2 详解】

解：$\because$ 关于 x 的方程 $(k-1)x^2+(k-3)x+1=0$ 的两根为 x_1， x_2，且 $x_1<2$， $x_2<2$，

$\therefore \begin{cases} \Delta=(k-3)^2-4(k-1)\ge 0 \\ (x_1-2)\cdot(x_2-2)>0 \\ (x_1-2)+(x_2-2)<0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} k^2-10k+13\ge 0 \\ x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)+4>0 \\ x_1+x_2-4<0 \end{cases}$，

又 $\because x_1+x_2=-\dfrac{k-3}{k-1}$， $x_1x_2=\dfrac{1}{k-1}$，

$\therefore \begin{cases} k^2-10k+13\ge 0 \\ \dfrac{1}{k-1}+2\dfrac{k-3}{k-1}+4>0 \\ -\dfrac{k-3}{k-1}-4<0 \end{cases}$，

解得 $k<1$ 或 $k\ge 5+2\sqrt{3}$；

故实数 k 的取值范围为 $\{k\,|\,k<1$ 或 $\dfrac{3}{2}<k\le 5-2\sqrt{3}$ 或 $k\ge 5+2\sqrt{3}\}$.

19.【答案】（1） $(3,\dfrac{9}{2})\cup(9,+\infty)$

（2） $AN=6$， $AM=8$ 最小面积为 48 平方米

【分析】（1）先表达出 $AMPN$ 的面积表达式， $S_{AMPN}>54$ 时解出不等式，即可知 AN 的取值范围.

（2）令 $t=x-3$，将式子化成对勾函数后求最值.

【小问 1 详解】

解：设 AN 的长为 x 米（ $x>3$ ）

$\because$ $ABCD$ 是矩形

$\therefore \dfrac{|DN|}{|AN|}=\dfrac{|DC|}{|AM|}$

$\therefore |AM|=\dfrac{4x}{x-3}$

$\therefore S_{AMPN}=|AN|\cdot|AM|=\dfrac{4x^2}{x-3}(x>3)$

由 $S_{AMPN}>54$，得 $\dfrac{4x^2}{x-3}>54$

$\because x>3$

$\therefore (2x-9)(x-9)>0$，解得 $3<x<\dfrac{9}{2}$ 或 $x>9$

即 AN 的取值范围为 $(3,\dfrac{9}{2})\cup(9,+\infty)$

【小问 2 详解】

令 $y=\dfrac{4x^2}{x-3}$， $t=x-3$（$t>0$），则 $x=t+3$

$\therefore y=\dfrac{4(t+3)^2}{t}=4(t+\dfrac{9}{t}+6)\geq 48$

当且仅当 $t=\dfrac{9}{t}(t>0)$，即 $t=3$ 时，等号成立，此时 $AN=6$， $AM=8$ 最小面积为 48 平方米

20.【答案】（1） $g_A(1)=-1$， $g_B(1)=1$， $A*B=\{1,4,5\}$；（2）证明见解析.

【分析】（1）根据题中定义可求得 $g_A(1)=-1$， $g_B(1)=-1$，进一步可求得 $A*B$；

（2）分 $x\in A$ 且 $x\in B$、 $x\in A$ 且 $x\notin B$、 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 三种情况讨论，计算出 $g_A(x)$、 $g_B(x)$、 $g_{A*B}(x)$ 的值，验证 $g_{A*B}(x)=g_A(x)\cdot g_B(x)$ 成立，即可证得结论成立.

【详解】（1）因为 $A=\{1,2,3\}$， $B=\{2,3,4,5\}$，则 $g_A(1)=-1$， $g_B(1)=1$，

根据定义可得 $g_A(1)\cdot g_B(1)=g_A(4)\cdot g_B(4)=g_A(5)\cdot g_B(5)=-1$，

$g_A(2)\cdot g_B(2)=g_A(3)\cdot g_B(3)=1$， $g_A(3)\cdot g_B(3)=1$，故 $A*B=\{1,4,5\}$；

（2）①当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 时， $g_A(x)=g_B(x)=-1$，则 $x\notin A*B$，则 $g_{A*B}(x)=1$，

所以， $g_{A*B}(x)=g_A(x)\cdot g_B(x)$；

②当 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 时， $g_A(x)=-1$， $g_B(x)=1$， $x\in A*B$，则 $g_{A*B}(x)=-1$.

所以 $g_{A*B}(x)=g_A(x)\cdot g_B(x)$；

③当 $x\notin A$ 且 $x\in B$ 时， $g_A(x)=1$， $g_B(x)=-1$，所以， $x\in A*B$，则 $g_{A*B}(x)=-1$

综上所述， $g_{A*B}(x)=g_A(x)\cdot g_B(x)$.