2024—2025 学年度第一学期暑期第二阶段练习题

年级：高三　科目：数学

考试时间：120 分钟，满分：150 分

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选中，选出符合题目要求的一项）

1．设复数z满足$(1+\mathrm{i})z=2$， 其中i为虚数单位， 则z的共轭复数等于（　　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．$2+2\mathrm{i}$　　D．$2-2\mathrm{i}$

2．计算$\sin 46^\circ\cos 16^\circ-\cos 46^\circ\sin 16^\circ$的结果等于（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3．从装有十个红球和十个白球的罐子里任取两球，下列情况中是互斥而不对立的两个事件的是（　　）

A．至少有一个红球；至少有一个白球　　B．恰有一个红球；都是白球

C．至少有一个红球；都是白球　　D．至多有一个红球；都是红球

4．对于不重合的两个平面α与β， 给定下列条件：

①存在平面γ，使得α, β都垂直于γ

②存在平面γ，使得α, β都平行于γ

③存在直线$l\subset\alpha$，直线$m\subset\beta$，使得$l \parallel m$

④存在异面直线l, m，使得$l \parallel \alpha$，$l \parallel \beta$，$m \parallel \alpha$，$m \parallel \beta$

其中，可以判定α与β平行的条件有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

5. 高二某班共有50名学生，其中女生有30名，“三好学生”人数是全班人数的$\frac{1}{5}$，且“三好学生”中女生占一半，现从该班学生中任选1人参加座谈会，则在已知没有选上女生的条件下，选上的学生是“三好学生”的概率为（　　）

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 某外商计划在5个候选城市投资3个不同的项目，且在同一个城市投资的项目不超过2个，则该外商不同的投资方案有（　　）

A. 36种　　B. 60种　　C. 120种　　D. 180种

7. 在一个数列中，如果$\forall n\in \mathbf{N}^*$，都有$a_na_{n+1}a_{n+2}=k$（$k$为常数），那么这个数列叫做等积数列，$k$叫做这个数列的公积．已知数列$\{a_n\}$是等积数列，且$a_1=1$，$a_2=2$，公积为8，则$a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=$（　　）

A. 4719　　B. 4721　　C. 4723　　D. 4724

8. 已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R},\omega>0)$的最小正周期为$\pi$．将$y=f(x)$的图象向左平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度，所得图象关于$y$轴对称，则$\varphi$的一个值是（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{8}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

9. 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，若$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=AA_1$，则异面直线BA_1与AC_1所成的角等于（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

10. 已知抛物线$x^2=4y$，P为直线$y=-1$上一点，过P作抛物线的两条切线，切点分别为A, B，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -2　　D. -1

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

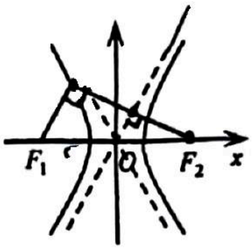
11. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中的常数项是______.

12. 已知向量a,b满足$|a|=3$，$|b|=5$，a与b的夹角为60°，则$|a-b|=$______.

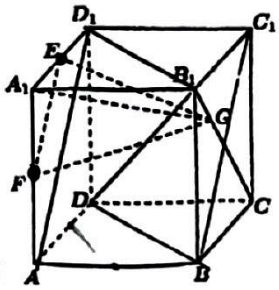
13. 已知点$(0,0)$在圆$x^2+y^2+2ax+2ay+4a^2+3a=0$外，则$a$的取值范围是

____

14. 已知点P是双曲线C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$左支上一点$F_1$, F_2是双曲线的左、右两个焦点，且$PF_1\perp PF_2$，PF_2与两条渐近线相交于M, N两点（如图），点N恰好平分线段PF_2，则双曲线的离心率是__________.



15. 如图，棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别为棱A_1D_1, AA_1的中点，G为面对角线B_1C上一个动点，则下列选项中正确的是__________.



①三棱锥A_1-EFG的体积为定值$\dfrac{1}{3}$

②存在$G\in$线段B_1C，使平面EFG // 平面BDC_1

③G为B_1C上靠近B_1的四等分点时，直线EG与BC_1所成角最小

④若平面EFG与棱AB, BC有交点，记交点分别为M, N，则$MF+MN$的取值范围是$\left[\sqrt{5},\sqrt{13}\right]$

三、解答题（共6题，满分85分）

16.（本小题13分）已知在$\triangle ABC$中，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（I）求B的大小；

（II）在下列三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，并求出BC边上的中线的长度.

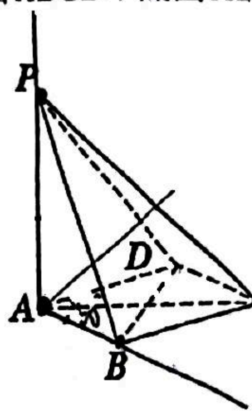
①$c=\sqrt{2}b$；　②周长为$4+2\sqrt{3}$；　③面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

17.（本小题13分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$是菱形，$AB=4$，$\angle BAD=60^\circ$.

（I）求证：$BD\perp$平面PAC；

（II）若$PA=AB$，求PB与AC所成角的余弦值；

（III）当平面PBC与平面PDC垂直时，求PA的长.



18.（本小题14分）小明同学两次测试成绩（满分100分）如表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物
第一次	87	92	91	92	85	93
第二次	82	94	95	88	94	87

（I）从小明同学第一次测试的科目中随机抽取1科，求该科成绩大于90分的概率；

（II）从小明同学第一次测试和第二次测试的科目中各随机抽取1科，记X为抽取的2科中成绩大于90分的科目数量，求X的分布列和数学期望$E(X)$；

（III）现有另一名同学两次测试成绩（满分100分）及相关统计信息如表所示：

	语文	数学	英语	物理	化学	生物	6科成绩均值	6科成绩方差
第一次	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	x_1 4	
第二次	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	x_2 4	D_2

将每科两次测试成绩的均值作为该科的总评成绩，这 6 科总评成绩的方差为 D_3．有一种观点认为：若 $x_1=x_2$，$D_1<D_2$，则 $D_1\leqslant D_3\leqslant D_2$．你认为这种观点是否正确？（只写“正确”或“不正确”）

19．（本小题 15 分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点 P 到左右两焦点 F_1, F_2 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

（I）求椭圆的方程；

（II）过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点．若 y 轴上一点 $M\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 满足 $|MA|=|MB|$，求直线 l 斜率 k 的值．

20．（本小题 15 分）已知函数 $f(x)=x-a\ln x$．

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求 $f(x)$ 的单调区间；

（III）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，求证：$(a-1)\ln x_0>a$．

21．（本小题15分）对于给定的正整数m和实数a，若数列$\{a_n\}$满足如下两个性质：

①$a_1+a_2+\cdots+a_m=a$；

②对$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+m}=a_n$，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P_m(a)$．

（I）若数列$\{a_n\}$具有性质$P_2(1)$，求数列$\{a_n\}$的前10项和；

（II）对于给定的正奇数t，若数列$\{a_n\}$同时具有性质$P_4(4)$和$P_t(t)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（III）若数列$\{a_n\}$具有性质$P_m(a)$，求证：存在自然数N，对任意的正整数k，不等式$\dfrac{a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+k}}{k}\geqslant\dfrac{a}{m}$均成立．