2023北京十八中初二（上）期中

数　学

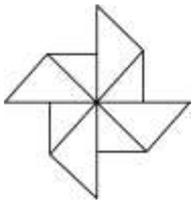
温馨提醒：试卷一共27个小题，并将所有答案填涂在答题卡上．

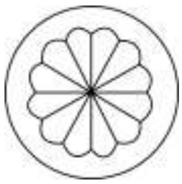
一、选择题（共30分，每题3分）

1. 下列四个图形中，是轴对称图形的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

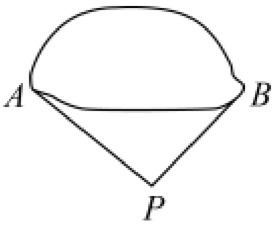
2. 正六边形的外角和为（　）

A. 180°　　B. 360°　　C. 720°　　D. 1080°

3. 下列图形具有稳定性的是（　）

A. 三角形　　B. 正方形　　C. 长方形　　D. 正六边形

4. 如图，为了估计一池塘岸边两点 A，B 之间的距离，小颖同学在池塘一侧选取了一点 P，测得 $PA=100\text{m}$，$PB=90\text{m}$，那么点 A 与点 B 之间的距离可能是（　　）

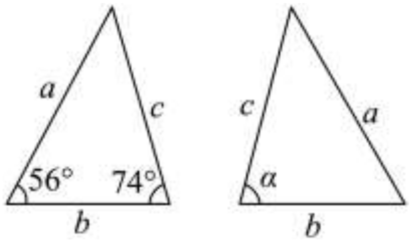


A. 10m　　B. 120m　　C. 190m　　D. 220m

5. 如果等腰三角形的一个角为40°，那么这个等腰三角形的顶角的度数为（　）

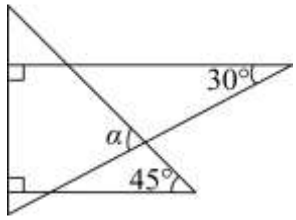
A. 40°　　B. 100°　　C. 40°或70°　　D. 40°或100°

6. 若图中的两个三角形全等，则 $\angle\alpha$ 的度数是（　）



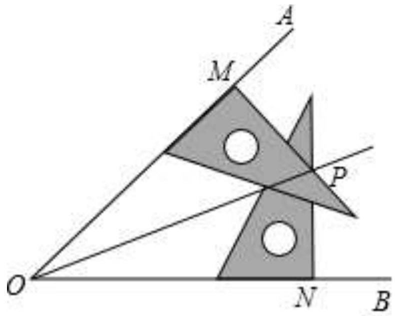
A. 74°　　B. 60°　　C. 56°　　D. 50°

7. 如图，将一副三角板叠在一起，则图中 $\angle\alpha$ 的度数是（　　）



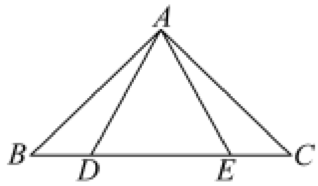
A. 50°　　B. 60°　　C. 75°　　D. 85°

8. 数学课上，同学们探讨利用不同画图工具画角的平分线的方法．小旭说：我用两块含 30°的直角三角板就可以画角平分线．如图，取 $OM=ON$，把直角三角板按如图所示的位置放置，两直角边交于点 P，则射线 OP 是$\angle AOB$ 的平分线，小旭这样画的理论依据是（　）



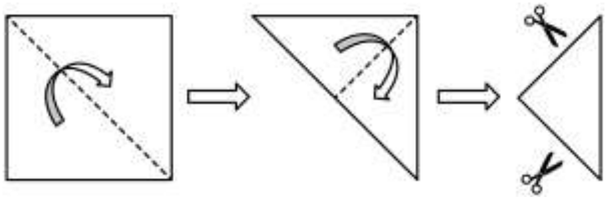
A. SSA　　B. HL　　C. ASA　　D. SSS

9. 如图，点 D，E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，其中 B，C 为对应顶点，D，E 为对应顶点，下列结论不一定成立的是（　）



A. $AC=CD$　　B. $BE=CD$　　C. $\angle ADE=\angle AED$　　D. $\angle BAE=\angle CAD$

10. 把一张正方形纸片按如图所示的方法对折两次后剪去两个角，打开后得到一个正多边形，则这个正多边形不可能是（ ）



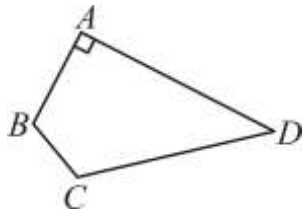
A. 正方形　　B. 正六边形　　C. 正八边形　　D. 正十二边形

二、填空题（共 24 分，每小题 3 分）

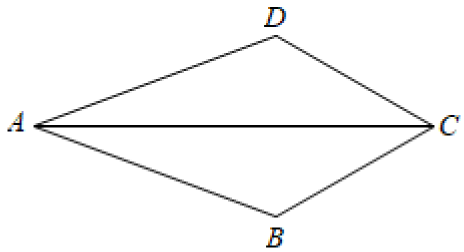
11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M\left(0,-2\right)$ 关于 x 轴的对称点 N 的坐标是__________.

12. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $\angle A=30°$，则 $\angle B=$________度.

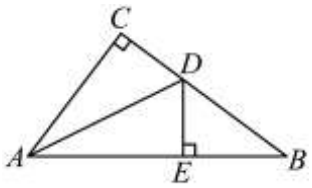
13. 如图，在四边形 ABCD 中，∠A=90°，∠D=40°，则∠B+∠C 为________.



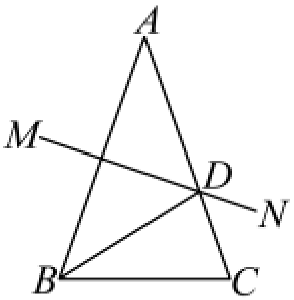
14. 如图，四边形$ABCD$中，$\angle BAC=\angle DAC$，请补充一个条件____，使$\triangle ABC\cong\triangle ADC$．



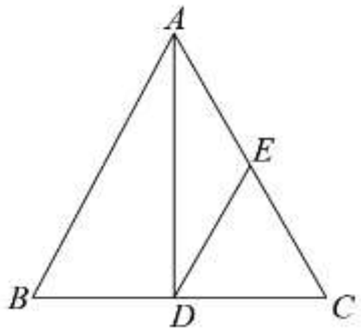
15. 如图，在△ABC中，∠C=90°，AD是角平分线，DE⊥AB于E，且DE=3 cm，BD=5 cm，则BC=_________ cm．



16. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AB的垂直平分线MN交AC于D点．若BD平分$\angle ABC$，则$\angle A=$________________°.



17. 如图，$\triangle ABC$是等边三角形，$AB=6$，AD是BC边上的中线．点E在AC边上，且$\angle EDA=30°$，则直线ED与AB的位置关系是_________，ED的长为_________.



18. 学校组织学生参加木艺艺术品加工劳动实践活动．已知某木艺艺术品加工完成共需 A，B，C，D，E，F，G七道工序，加工要求如下：

①工序C，D须在工序A完成后进行，工序E须在工序B，D都完成后进行，工序F须在工序C，D都完成

后进行；

②一道工序只能由一名学生完成，此工序完成后该学生才能进行其他工序；

③各道工序所需时间如下表所示：

工序	A	B	C	D	E	F	G
所需时间/分钟	9	9	7	9	7	10	2

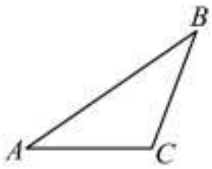
在不考虑其他因素的前提下，若由一名学生单独完成此木艺艺术品的加工，则需要______分钟；若由两名学生合作完成此木艺艺术品的加工，则最少需要______分钟．

三、解答题（共 46 分）

19. 解方程组：$\begin{cases}2x+y=3\\3x-y=7\end{cases}$

20. 解不等式组：$\begin{cases}2x>1-x\\x+2<4x-1\end{cases}$

21. 如图，已知 $\triangle ABC$.



（1）画出 $\triangle ABC$ 的高 BD ；

（2）画出 $\triangle ABC$ 的角平分线 AE .

22. 已知：如图，点 B 是∠MAN 边 AM 上的一定点（其中∠MAN＜45°），求作：△ABC，使其满足：①点 C 在射线 AN 上，②∠ACB＝2∠A.

下面是小兵设计的尺规作图过程.

作法：①作线段 AB 的垂直平分线 1，直线 l 交射线 AN 于点 D；

②以点 B 为圆心，BD 长为半径作弧，交射线 AN 于另一点 C；

③连接 BC，则△ABC 即为所求三角形.

根据小兵设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形；(保留作图痕迹)

（2）完成下面的证明.

证明：∵直线 l 为线段 AB 的垂直平分线，

∴AD＝BD（ _____ ）(填推理的依据).

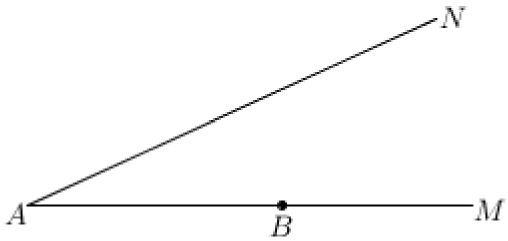
∴∠A＝∠_____.

∴∠BDC＝∠A+∠ABD＝2∠A

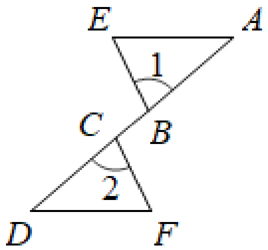
∵BC＝BD

∴∠ACB＝∠BDC （ _____ ）(填推理的依据).

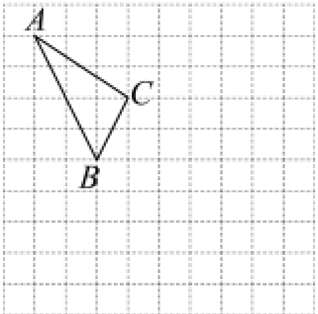
∴$\angle ACB=2\angle A$.



23. 如图，A，B，C，D 是同一条直线上的点，$AC=BD$，$AE\parallel DF$，$\angle 1=\angle 2$；求证：$BE=CF$



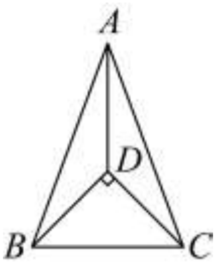
24. 如图所示的正方形网格中，每个小正方形的边长都为 1，$\triangle ABC$ 的顶点都在网格线的交点上，点 B 的坐标为$(-2,0)$，点 C 的坐标为 $-1,2$.



（1）根据上述条件，在网格中建立平面直解坐标系 xOy；

（2）画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形$\triangle A_1B_1C_1$；

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是三角形内一点，连接 $AD,BD,CD,\angle BDC=90^\circ$，$DB=DC$.



（1）求证：$\angle BAD=\angle CAD$；

（2）直接写出$\angle ADB$ 的度数.

26. 如图，已知等腰 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30^\circ,AB=AC,\angle PAB=\alpha$，点 B 关于直线 AP 的对称点为点 D，连接 AD，连接 BD 交 AP 于点 G，连接 CD 交 AP 于点 E，交 AB 于点 F .

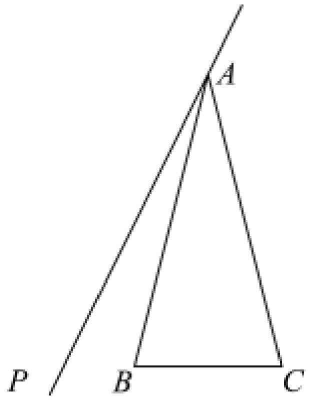
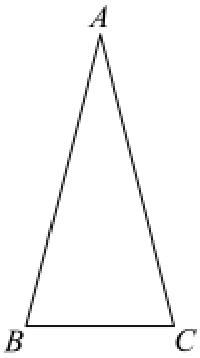
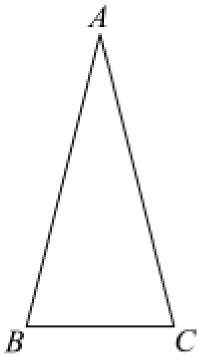


图1



备用图



备用图

（1）如图 1，当$\alpha=15^{\circ}$时，

①按要求画出图形，并直接写出$\angle ACD$的度数；

②探究 DE 与 BF 的数量关系并加以证明；

（2）在直线 AP 绕点 A 顺时针旋转的过程中$\left(0^{\circ}<\alpha<75^{\circ}\right)$，当$\triangle AEF$ 为等腰三角形时，利用备用图直接求出α的值为______________.

27. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点$M\left(a,\ b\right)$，将经过点$\left(a,0\right)$且垂直于x轴的直线记为直线$x=a$，将经过点$\left(0,\ b\right)$且垂直于y轴的直线记为直线 $y=b$．对于点 P 给出如下定义，将点 P 先关于直线 $x=a$ 对称得到点 p，再将点 p 关于直线 $y=b$ 对称得到点 Q，称点 Q 为点 p 关于 M 的“对应点”．

已知$\triangle ABC$ 顶点坐标为$A\left(2,0\right)$，$B\left(4,0\right)$，$C\left(3,-3\right)$.

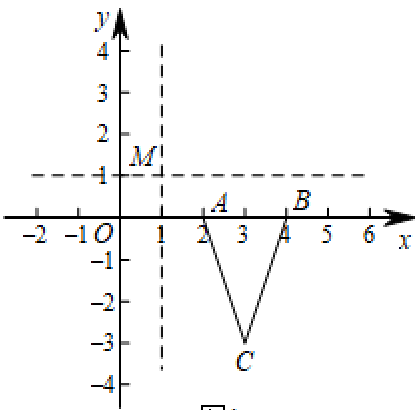
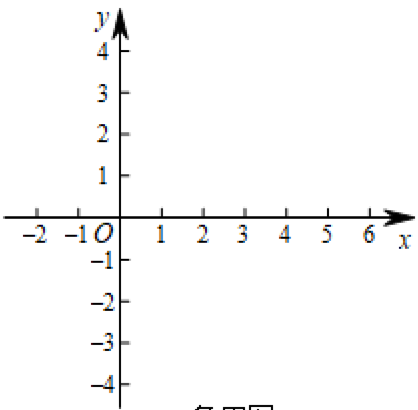


图1



备用图

（1）如图 1，若点$M\left(1,1\right)$.

①由材料，将点$A\left(2,0\right)$关于直线$x=1$对称得到点$\left(0,0\right)$，再将点$\left(0,0\right)$关于直线$y=1$对称得到点$\left(0,2\right)$，则点$A\left(2,0\right)$关于 M 的“对应点”为$\left(0,2\right)$．请写出点$B\left(4,0\right)$关于 M 的“对应点”：__________；点$C\left(3,-3\right)$关于 M 的“对应点”：__________；

②若点$P_1\left(-1,\ n\right)$和点$p_2\left(-1,\ n+1\right)$关于 M 的“对应点”分别为点Q_1和点Q_2，且线段Q_1Q_2与$\triangle ABC$的

边没有公共点，求n的取值范围；

（2）若点B关于M的“对应点”为点Q_3，且以A、B、Q_3为顶点的三角形恰与$\triangle AOC$全等，请写出所有满足条件的点M的坐标：______________.

参考答案

一、选择题（共 30 分，每题 3 分）

1.【答案】D

【分析】根据轴对称图形的概念：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，对选项进行分析即可.

【详解】解：A，B，C 选项中的图形都不能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形，故不符合题意；

D 选项中的图形能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形，故符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，解本题的关键在寻找图形的对称轴，看图形两部分折叠后是否能够互相重合.

2.【答案】B

【分析】根据凸多边形的外角和定理求解即可.

【详解】任意凸多边形的外角和为 360°，

∴正六边形的外角和为 360°，

故选：B.

【点睛】本题考查多边形的外角和定理，解题的关键是熟记基本结论.

3.【答案】A

【分析】根据三角形具有稳定性即可解答.

【详解】解：三角形具有稳定性，正方形、长方形、正六边形不具有稳定性.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了三角形的稳定性、四边形的不稳定性等知识点掌握三角形具有稳定性是解题的关键.

4.【答案】B

【分析】根据三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边可以确定 BC 的取值范围，从而可以解答本题.

【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中，$PA=100\text{m}$，$PB=90\text{m}$，

∴$100-90<AB<100+90$，

∴$10<AB<190$，

故点 A 与点 B 之间的距离可能是120m.

故选：B.

【点睛】本题考查三角形三边关系，解题的关键是明确三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边.

5.【答案】D

【分析】当40°这个角是顶角时，即顶角为40°；当40°这个角是底角时，根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可解答.

【详解】解：①当40°这个角是顶角时，即顶角为40°；

②当40°这个角是底角时，则这个等腰三角形的另一底角也为40°，

所以这个等腰三角形的顶角为：$180^{\circ}-40^{\circ}-40^{\circ}=100^{\circ}$，

综上，这个等腰三角形的顶角的度数为40°或100°.

故选D.

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质、三角形内角和定理等知识点，掌握分类讨论思想是解答本题的关键.

6.【答案】A

【分析】根据全等三角形的性质，求解即可.

【详解】解：根据全等三角形的性质，可得$\angle\alpha=74^{\circ}$，

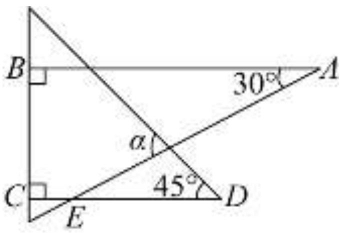
故选：A

【点睛】此题考查了全等三角形的性质，解题的关键是熟练掌握全等三角形的性质.

7.【答案】C

【分析】由题意可得$\angle ABC=\angle BCD=90^{\circ}$，从而可判定$AB\parallel CD$，则有$\angle AED=\angle A=30^{\circ}$，利用三角形的外角性质即可求解.

【详解】解：如图，



由题意得：$\angle ABC=\angle BCD=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ABC+\angle BCD=180^{\circ}$，

$\therefore AB\parallel CD$，

$\therefore\angle AED=\angle A=30^{\circ}$，

$\therefore\angle\alpha=\angle D+\angle AED=75^{\circ}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查三角形的外角性质，平行线的判定与性质，解答的关键是熟练掌握相应的知识并灵活运用.

8.【答案】B

【分析】根据题意可得$OP=OP$，$OM=ON$，$\angle PMO=\angle PNO=90^{\circ}$，根据全等三角形的判定方法，即可求解.

【详解】解：根据题意可得$OP=OP$，$OM=ON$，$\angle PMO=\angle PNO=90^{\circ}$，

根据全等三角形的判定方法可得$\triangle POM\cong\triangle PON(HL)$

故选B

【点睛】此题考查了全等三角形的判定方法，解题的关键是根据题意找到相等的量，再根据全等三角形的判定方法求解.

9.【答案】A

【分析】根据全等三角形的性质，即可求解.

【详解】解：∵$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，

∴$AC=AB$，$BD=CE$，$\angle ADB=\angle AEC$，$\angle BAD=\angle CAE$，

∴$BE=CD$，$\angle ADE=\angle AED$，$\angle BAE=\angle CAD$，

故结论一定成立的有B、C、D.

故选：A

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质，熟练掌握全等三角形的对应边相等，对应角相等是解题的关键.

10.【答案】B

【分析】可以实际动手操作来进行解题.

【详解】解：由题意可知，折叠后有四层纸，可知展开后的正多边形的边数是4的倍数，

∴不可能是正六边形，

故选：B.

【点睛】本题主要考查了与剪纸相关的知识，熟练地动手操作能力是解决问题的关键.

二、填空题（共24分，每小题3分）

11.【答案】$(0,2)$

【分析】根据关于x轴对称的两个点的纵坐标互为相反数，横坐标相等，即可作答.

【详解】解：因为点$M(0,-2)$关于x轴的对称点是点N

所以点N的坐标是$(0,2)$

故答案为：$(0,2)$

【点睛】本题考查了关于x轴对称的点的坐标，正确掌握关于x轴对称的点的坐标特征是解题的关键，难度较小.

12.【答案】60

【分析】根据直角三角形两锐角互余列式计算即可求解.

【详解】解：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，若$\angle A=30^{\circ}$，

$\therefore\angle B=90^{\circ}-30^{\circ}=60^{\circ}$.

故答案为：60.

【点睛】本题主要考查了直角三角形两锐角互余的性质，熟练掌握相关知识是解题关键.

13.【答案】230°

【分析】

【详解】∵∠A+∠B+∠C+∠D=（4-2）×180°=360°，∠A=90°，∠D=40°，∴∠B+∠C=360°-90°-40°=230°，

故答案为230°.

【点睛】本题考查了四边形的内角和，熟记四边形的内角和是360度是解题的关键.

14.【答案】$\angle D=\angle B$(答案不唯一)

【分析】本题是一道开放型的题目，答案不唯一，只要符合全等三角形的判定定理即可.

【详解】解：添加的条件为$\angle D=\angle B$，

理由是：在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}\angle BAC=\angle DAC\\ \angle D=\angle B\\ AC=AC\end{cases},$$

∴$\triangle ABC\cong\triangle ADC\ (AAS)$，

故答案为：$\angle D=\angle B$.

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定定理，能熟记全等三角形的判定定理是解决本题的关键，注意：全等三角形的判定定理有SAS，ASA，AAS，SSS，两直角三角形全等还有HL.

15.【答案】8

【详解】试题解析：∵$CD\perp AC$，$DE\perp AB$，AD平分$\angle BAC$，

∴$CD=DE=3$，$BC=CD+BD=3+5=8$cm.

16.【答案】36

【详解】∵$AB=AC$，

∴$\angle C=\angle ABC$，

∵AB的垂直平分线MN交AC于D点.

∴$\angle A=\angle ABD$，

∵BD平分$\angle ABC$，

∴$\angle ABD=\angle DBC$，

∴$\angle C=2\angle A=\angle ABC$，

设$\angle A$为x，

可得：$x+x+x+2x=180°$，

解得：$x=36°$，

故答案为36.

【点睛】此题考查了线段垂直平分线的性质以及等腰三角形的性质．根据垂直平分线的性质和等腰三角形的性质得出角相等，然后在一个三角形中利用内角和定理列方程即可得出答案.

17.【答案】 ①. 平行 ②. 3

【分析】根据等边三角形和三角形中位线的性质和定理解答即可．

【详解】解：∵△ABC是等边三角形，AD是BC边上的中线．

∴∠BAD=∠CAD=30°，BD=DC，AD⊥BC，

∵∠EDA=30°，

∴∠DAE=∠EDA=30°，∠EDC=∠C=60°，

∴AE=DE=EC，

∴DE是△ABC的中位线，

∴DE∥AB，DE=$\frac{1}{2}AB$=3，

故答案为：平行；3．

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，关键是得出DE是△ABC的中位线．

18.【答案】　①. 53　②. 28

【分析】将所有工序需要的时间相加即可得出由一名学生单独完成需要的时间；假设这两名学生为甲、乙，根据加工要求可知甲学生做工序A，乙学生同时做工序B；然后甲学生做工序D，乙学生同时做工序C，乙学生工序C完成后接着做工序G；最后甲学生做工序E，乙学生同时做工序F，然后可得答案．

【详解】解：由题意得：$9+9+7+9+7+10+2=53$（分钟），

即由一名学生单独完成此木艺艺术品的加工，需要53分钟；

假设这两名学生为甲、乙，

∵工序C，D须在工序A完成后进行，工序E须在工序B，D都完成后进行，且工序A，B都需要9分钟完成，

∴甲学生做工序A，乙学生同时做工序B，需要9分钟，

然后甲学生做工序D，乙学生同时做工序C，乙学生工序C完成后接着做工序G，需要9分钟，

最后甲学生做工序E，乙学生同时做工序F，需要10分钟，

∴若由两名学生合作完成此木艺艺术品的加工，最少需要$9+9+10=28$（分钟），

故答案为：53，28；

【点睛】本题考查了逻辑推理与时间统筹，根据加工要求得出加工顺序是解题的关键．

三、解答题（共46分）

19.【答案】$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$

【分析】方程组利用加减消元法求出解即可．

【详解】解：$\begin{cases}2x+y=3①\\3x-y=7②\end{cases}$，

①+②得：$5x=10$，

解得：$x=2$，代入①中，

解得：$y=-1$，

则原方程组的解是$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$.

【点睛】本题考查解二元一次方程组，解答本题的关键是掌握加减消元法.

20.【答案】$x>1$

【分析】分别解不等式①、②，再取公共部分即可.

【详解】解：$\begin{cases}2x\geq 1-x & ①\\x+2<4x-1 & ②\end{cases}$

解不等式①，得$x>\dfrac{1}{3}$；

解不等式②，得$x>1$，

∴原不等式组的解集是$x>1$.

【点睛】本题考查了解不等式组，正确确定各不等式的公共解集是解题的关键，可以根据口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无解了”确定.

21.【答案】（1）见详解；

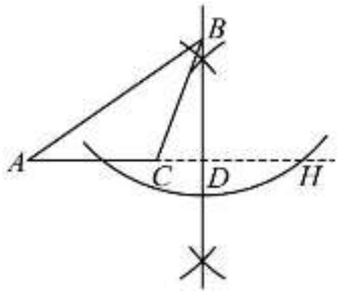
（2）见详解.

【分析】（1）如图，延长AC至H，利用尺规过B点作直线AH的垂线，交AH于D点，则线段BD就是AC边上的高.

（2）利用尺规作图法作出$\angle BAC$的角平分线交BC边于E点，则线段AE就是$\triangle ABC$的角平分线.

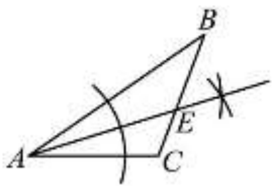
【小问1详解】

如图，线段BD就是AC边上的高.



【小问2详解】

如图，线段AE就是$\triangle ABC$的角平分线.



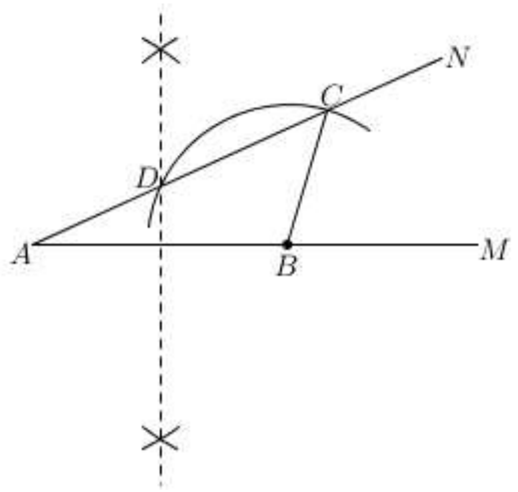
【点睛】本题主要考查了利用尺规作三角形的高和角平分线，熟练掌握过已知点作已知直线的垂线及角平分线的尺规作图法是解题的关键.注意：三角形的高和角平分线都是线段.

22.【答案】（1）见解析；（2）见解析

【分析】（1）根据几何语言画出对应图形即可；

（2）根据证明过程补全相应知识点即可.

【详解】解：（1）如图所示：



（2）证明：∵直线 l 为线段 AB 的垂直平分线，

∴$AD=BD$（<u>　垂直平分线上任意一点到线段两端点距离相等　</u>）（填推理的依据）.

∴$\angle A=\angle$ <u>　DBA　</u>.

∴$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2\angle A$

∵$BC=BD$

∴$\angle ACB=\angle BDC$（<u>　等腰三角形两底角相等　</u>）（填推理的依据）.

∴$\angle ACB=2\angle A$.

【点睛】本题考查尺规作图，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的定义，圆的任意半径相等，灵活运用性质定理是解题关键.

23.【答案】见解析

【分析】根据线段和差关系先证明 $AB=DC$，根据平行线的性质证明$\angle A=\angle D$，根据 ASA 即可证明$\triangle ABE\cong\triangle DCF$，进而即可得证.

【详解】证明：∵$AC=AB+BC$，$BD=BC+CD$，$AC=BD$，

∴$AB=DC$，

∵$AE\parallel DF$，

∴$\angle A=\angle D$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle D\\AB=DC\\\angle 1=\angle 2\end{cases},$$

∴$\triangle ABE\cong\triangle DCF$（ASA），

∴$BE=CF$.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质以及平行线的判定，利用全等三角形的判定定理 ASA 证出$\triangle ABE\cong\triangle DCF$ 是解题的关键.

24.【答案】（1）见解析　（2）见解析

【分析】（1）根据 B，C 两点的坐标确定平面直角坐标系即可；

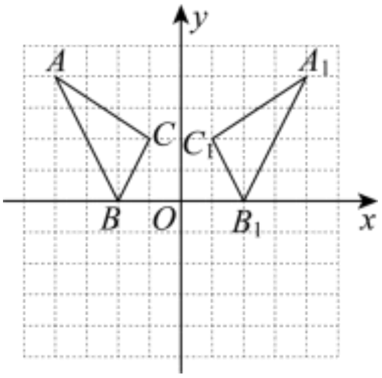
（2）利用轴对称变换的性质分别作出 A、B、C 的对应点 A_1、B_2、C_1，然后顺次连接即可.

【小问 1 详解】

解：如图：平面直解坐标系 xOy 即为所求.

【小问 2 详解】

解：如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



【点睛】本题主要考查了平面直角坐标系，坐标与图形、轴对称作图等知识点，正确建立直角坐标系是解答本题的关键.

25.【答案】（1）见解析　（2）$\angle ADB = 135°$

【分析】（1）利用 SSS 证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$，即可得；

（2）根据 $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ 得 $\angle ADB = \angle ADC$，根据 $\angle BDC = 90°$，$\angle ADB + \angle ADC + \angle BDC = 360°$，即可得.

【小问 1 详解】

证明：在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} BA = CA \\ AD = AD, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD(SSS)$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$；

【小问 2 详解】

解：$\because \triangle BAD \cong \triangle CAD$，

$\therefore \angle ADB = \angle ADC$，

$\because \angle ADB + \angle ADC + \angle BDC = 360°$，$\angle BDC = 90°$，

$\therefore \angle ADB = \dfrac{1}{2}(360° - \angle BDC) = \dfrac{1}{2} \times (360° - 90°) = 135°$.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，等边对等角，解题的关键是掌握这些知识点.

26.【答案】（1）①图形见解析，$\angle ACD = 60°$；② $DE = 2BF$，证明见解析

（2）$30°$ 或 $52.5°$

【分析】（1）①根据题意直接进行作图，由题意易得 $AD = AB$, $\angle 1 = \angle 2 = 15°$，则有

$\angle DAC=\angle 1+\angle 2+\angle BAC=60^{\circ}$，进而可证$\triangle ACD$为等边三角形，则问题得解；

②连接EB，由题意可得$ED=EB$，进而可得$\angle ADB=75^{\circ}$，证明$AB\perp DC$，最后根据线段的数量关系可求解；

（2）如图2，求得$\triangle DAC$是等腰三角形，求出$\angle ADC=75^{\circ}-\alpha$，$\angle AEF=75^{\circ}$，然后进行分类求解即可.

【小问1详解】

解：①如图1：

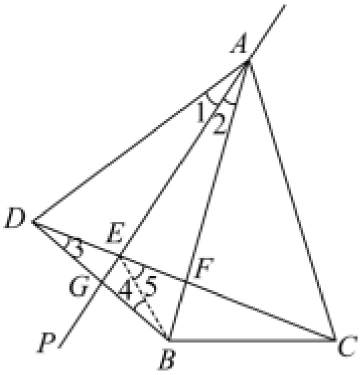


图1

$\because B、D$关于AP对称，

$\therefore AP$垂直平分BD，$\alpha=15^{\circ}$，

$\therefore AD=AB,\ \angle 1=\angle 2=15^{\circ}$，

$\because \angle BAC=30^{\circ}$，

$\therefore \angle DAC=\angle 1+\angle 2+\angle BAC=60^{\circ}$，

$\because AC=AB$，

$\therefore AC=AD$，

$\therefore \triangle ACD$为等边三角形

$\therefore \angle ACD=60^{\circ}$.

② $DE=2BF$，

证明：连接EB，

$\because AP$垂直平分BD，

$\therefore ED=EB$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$，

$\because AB=AD,\ \angle DAB=30^{\circ}$，

$\therefore \angle ADB=75^{\circ}$，

又$\angle ADC=60^{\circ}$，

$\therefore \angle 3=\angle 4=15^{\circ}$，

$\therefore \angle 5=30^{\circ}$，

又$AD=AC$，AB平分$\angle DAC$，

$\therefore AB \perp DC$，

$\therefore EB = 2BF$，

$\therefore DE = 2BF$．

【小问 2 详解】

如图 2，

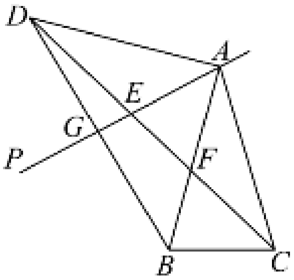


图2

$\because AD = AC$，

$\therefore \triangle DAC$ 是等腰三角形，

$\therefore \angle ADC = (180° - 2\alpha - 30°) \div 2 = 75° - \alpha$，

$\therefore \angle AEF = \angle ADC + \angle DAE = 75° - \alpha + \alpha = 75°$，

当 $AE = AF$ 时，$\angle EAF = \alpha = 180° - 75° \times 2 = 180° - 150° = 30°$；

当 $AE = EF$ 时，$\angle EAF = \alpha = (180° - 75°) \div 2 = 52.5°$；

当 $EF = AF$ 时，$\angle AEF = \angle EAF = \alpha = 75°$（舍去）．

故答案为：$30°$ 或 $52.5°$．

【点睛】本题主要考查等腰三角形的性质与判定、等边三角形的性质与判定、三角形内角和定理、轴对称的性质等知识，熟练掌握等腰三角形的性质与判定及等边三角形的性质与判定是解题的关键．

27.【答案】（1）①$(-2,2)$，$(-1,5)$；②$n < 1$，$2 < n < 4$，$n > 5$

（2）$\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

【分析】（1）①根据题目的新定义求解即可；

②根据新定义表达出 Q_2 和 Q_1，再分三种情况讨论即可；

（2）根据全等三角形的性质得出两种情况：$AQ_3 = AC，BQ_3 = OC$ 和 $BQ_3 = AC，AQ_3 = OC$，运用勾股定理列出连之间的距离方程来求出两种情况的 Q_3 的坐标，再根据题目的新定义即可求出 M 的坐标．

【小问 1 详解】

①将点 $B(4,0)$ 关于直线 $x = 1$ 对称得到点 $(-2,0)$，

再将点 $(-2,0)$ 关于直线 $y = 1$ 对称得到点 $(-2,2)$，

则点 $B(4,0)$ 关于 M 的“对应点”为 $(-2,2)$，

将点$C\left(3,-3\right)$关于直线$x=1$对称得到点$\left(-1,-3\right)$，

再将点$\left(-1,-3\right)$关于直线$y=1$对称得到点$\left(-1,5\right)$，

则点$C\left(3,-3\right)$关于M的“对应点”为$\left(-1,5\right)$，

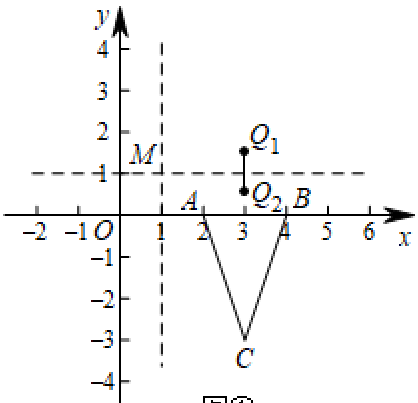
故答案为：$\left(-2,2\right)$，$\left(-1,5\right)$；

②解：由上述可得点$P_1\left(-1,\ n\right)$关于M的“对应点”Q_1为$\left(3,1-n\right)$，

点$P_2\left(-1,\ n+1\right)$关于M的“对应点”Q_2为$\left(3,1-n\right)$.

线段Q_1Q_2与$\triangle ABC$的边没有公共点有三种情况：

第一种情况：如图①，线段Q_1Q_2在AB上方，

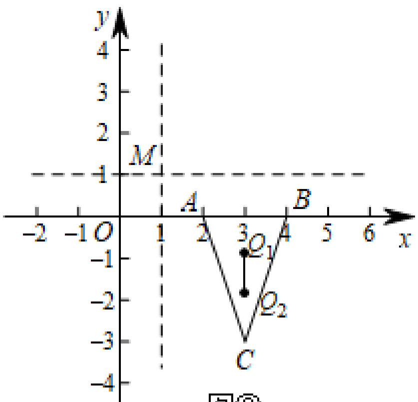


图①

此时只需Q_2，在x轴上方，

即$1-n>0$，解得$n<1$；

第二种情况：如图②，线段Q_1Q_2在$\triangle ABC$内部，此时只需Q_1在x轴下方，



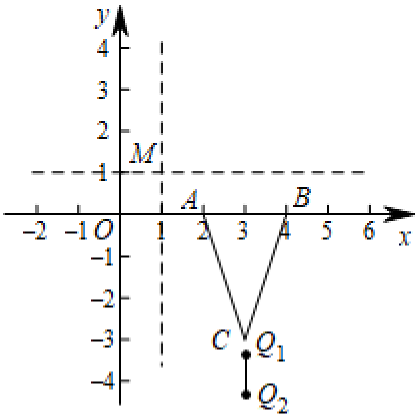
图②

Q_2在点C上方

即$\begin{cases}2-n<0\\1-n>-3\end{cases}$，

解得$2<n<4$；

第三种情况：如图③，线段Q_1Q_2在点C下方，



图③

此时只需Q_1在点C下方，

即$2-n<-3$，解得$n>5$；

综上所述，n的取值范围是$n<1$，$2<n<4$，$n>5$.

【小问2详解】

根据题意得$OC=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{(3-2)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{10}$，

$\because AB=OA=2$，

则要使$\triangle ABQ_3$恰与$\triangle AOC$全等，

有两种情况，如下：

当$AQ_3=AC=\sqrt{10}$，$BQ_3=OC=3\sqrt{2}$时，

设Q_3为$(m,\ n)$，则$AQ_3=\sqrt{(m-2)^2+(n-0)^2}=\sqrt{10}$，$BQ_3=\sqrt{(m-4)^2+(n-0)^2}=3\sqrt{2}$，

解得$\begin{cases}m=1\\n=3\end{cases}$和$\begin{cases}m=1\\n=-3\end{cases}$，

$\therefore Q_3$为$(1,3)$和$(1,-3)$，

则由新定义可得M为$\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$和$\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$；

当$BQ_3=AC=\sqrt{10}$，$AQ_3=OC=3\sqrt{2}$时，

设Q_3为$(a,\ b)$，则$AQ_3=\sqrt{(a-2)^2+(b-0)^2}=3\sqrt{2}$，$BQ_3=\sqrt{(a-4)^2+(b-0)^2}=\sqrt{10}$，

解得$\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}$和$\begin{cases}a=5\\b=-3\end{cases}$，

则由新定义可得 M 为 $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right)$；

∴所有满足条件的点 M 的坐标：$\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

【点睛】本题考查了平面直角坐标系的新定义，解决本题的关键是掌握“对应点”的定义和运用勾股定理表达出两点之间的距离进行求解.