2024北京人大附中高三（上）统练一

数　　学

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1．已知集合 $A=\left\{x\left|\log_2(x+1)<2\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|2x^2-5x-3\le 0\right.\right\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x\le 3\right.\right\}$　　B．$\left\{x\left|-1<x\le 3\right.\right\}$

C．$\left\{x\left|-\frac{1}{2}\le x<3\right.\right\}$　　D．$\left\{x\left|x\le 3\right.\right\}$

2．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A．$f(x)=\ln|x|$ B．$f(x)=2^{-x}$　C．$f(x)=x^3$　D．$f(x)=-x^2$

3．已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则（　）

A．$a>b>c$ B．$a>c>b$ C．$c>a>b$ D．$c>b>a$

4．为了得到函数 $y=\log_2(2x-2)$ 的图象，只需把函数 $y=\log_2 x$ 的图象上的所有点（　）

A．向左平移2个单位长度，再向上平移2个单位长度

B．向右平移2个单位长度，再向下平移2个单位长度

C．向左平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度

D．向右平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度

5．设 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\ne 0$，则“$x>1$”是“$x+\frac{1}{x}>2$”成立的（　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

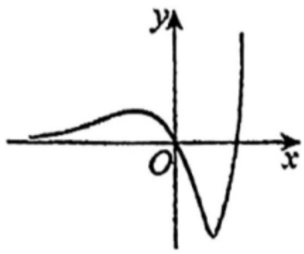
6．已知 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\left|x^2+2mx+m^2-4<0\right.\right\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{N}\left||x|<1\right.\right\}$，且 $A\cap B=B$，那么实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-1,1)$　B．$[-1,1]$　C．$(-2,2)$　D．$[-2,2]$

7．设函数 $f(x)=x|x|$，则不等式 $f\left(2\log_3 x\right)+f\left(3-\log_3 x\right)<0$ 的解集是（　）

A．$\left(\frac{1}{27},27\right)$　B．$\left(0,\frac{1}{27}\right)$ C．$(0,27)$　D．$(27,+\infty)$

8．若函数 $f(x)=\left(ax^2+bx\right)e^x$ 的图像如图，则实数 a，b 的值可能是（　）



A．$a=1$，$b=2$　　B．$a=1$，$b=-2$

C．$a=-1$，$b=2$　　D．$a=-1$，$b=-2$

9．德国心理学家艾・宾浩斯研究发现，人类大脑对事物的遗忘是有规律的，他依据实验数据绘制出“遗忘曲线”．“遗忘曲线”中记忆率 y 随时间 t（小时）变化的趋势可由函数 $y=1-0.6t^{0.27}$ 近似描述，则记忆率为 50% 时经过的时间约为（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

A．2 小时　B．0.8 小时　C．0.5 小时　D．0.2 小时

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x<0,\\ f(x-2), x\geq 0.\end{cases}$ 当 $\frac{1}{2}\leq m<\frac{3}{4}$ 时，方程 $f(x)=-\frac{1}{8}x+m$ 的根的个数为（　）

A．1　B．2　C．3　D．4

二、填空题（每题 5 分，共 25 分）

11．计算 $\ln 1+\lg 2-\lg\frac{1}{4}+3\lg 5=$__________.

12．已知方程 $x^2+(2m-1)x+4-2m=0$ 的两根一个比 2 大另一个比 2 小，则实数 m 的范围是__________.

13．若不等式 $ax^2-bx-c<0$ 的解集是 $\{x|2<x<3\}$，则不等式 $cx^2-bx-a>0$ 的解集为__________.

14．已知 t 为常数，函数 $y=\left|x^2-2x-t\right|$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值为 2，则 $t=$__________.

15．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-2$，$g(x)=x^2+ax(a\in\mathbf{R})$，$h(x)=kx-2k+1(k\in\mathbf{R})$，给出下列四个命题，其中真命题有__________.（写出所有真命题的序号）

①存在实数 k、使得方程 $|f(x)|=h(x)$ 恰有一个根；

②存在实数 k，使得方程 $|f(x)|=h(x)$ 恰有三个根；

③任意实数 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)-f(x_2)=g(x_1)-g(x_2)$；

④任意实数 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $f(x_1)-f(x_2)=g(x_2)-g(x_1)$.

三、解答题（共 35 分）

16.（本小题满分 10 分）

已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$（a，b 为常数，且 $a\neq 0$）满足条件：$f(x-1)=f(3-x)$，且方程 $f(x)=2x$ 有等根.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）是否存在实数 m、$n(m<n)$，使 $f(x)$ 定义域和值域分别为$\left[m,n\right]$和$\left[4m,4n\right]$，如果存在，求出 m、n 的值；如果不存在，说明理由．

17．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$．

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的最大值；

（Ⅱ）若 $a=2$，是否存在 x_1，$x_2\in(0,2)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点$\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$和点$\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$处的切线互相垂直？说明理由．（参考数据：$\mathrm{e}\approx 2.72$，$\ln 2\approx 0.69$）

18．（本小题满分 12 分）

已知集合$\Omega_n=\left\{X\mid X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\ldots,n\right\}$，其中 $n\geq 3$，

$\forall X=\left\{x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots x_n\right\}\in\Omega_n$，称 x_i 为 X 的第 i 个坐标分量．

若 $S\subseteq\Omega_n$，且满足如下两条性质：①S 中元素个数不少于 4 个；②$\forall X$，Y，$Z\in S$，存在 $m\in\{1,2,\ldots,n\}$，使得 X，Y，Z 的第 m 个坐标分量是 1；则称 S 为Ω_n 的一个好子集．

（Ⅰ）$S=\{X,Y,Z,W\}$ 为Ω_3 的一个好子集，且 $X=(1,1,0)$，$Y=(1,0,1)$，写出 Z，W；

（Ⅱ）若 S 为Ω_n 的一个好子集，求证：S 中元素个数不超过 2^{n-1}；

（Ⅲ）若 S 为Ω_n 的一个好子集，且 S 中恰有 2^{n-1} 个元素，求证：一定存在唯一一个 $k\in\{1,2,\ldots,n\}$，使得 S 中所有元素的第 k 个坐标分量都是 1．