统练 3

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|-1<x<2\}$　　（B）$\{x|-1<x\leqslant 2\}$

（C）$\{x|0\leqslant x<1\}$　　（D）$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

（2）若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则 $z=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（3）已知实数 a,b 满足 $a>b$，则下列不等式中正确的是

（A）$|a|>b$　　（B）$a>|b|$　　（C）$a^2>ab$　　（D）$ab>b^2$

（4）已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>a>b$　　（D）$c>b>a$

（5）已知函数 $f(x)=\log_2 x-x^2+2x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为

(A) $(1,4)$　　(B) $(0,1)\cup(4,+\infty)$

(C) $(1,2)$　　(D) $(0,1)\cup(2,+\infty)$

（6）若 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的一个动点，且 $\overline{AP}=x\overline{AB}+y\overline{AC}$，则 xy 的最大值是

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

（7）无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d，则“S_n 有最大值”是“$d<0$”的

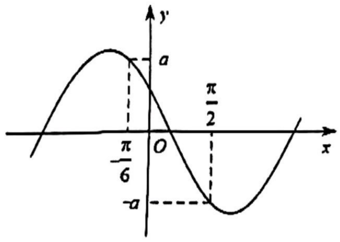
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

(8) 已知函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象.若函数 $y=f(x)$ 为奇函数，则 t 的最小值是

(A) $\frac{\pi}{12}$　　(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{3}$

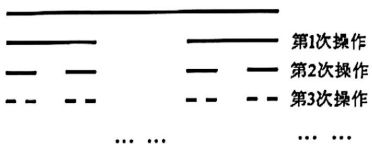


(9) 我们可以用下面的方法在线段上构造出一个特殊的点集：如图，取一条长度为 1 的线段，第 1 次操作，将该线段三等分，去掉中间一段，留下两段；第 2 次操作，将留下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留下四段；按照这种规律一直操作下去. 若经过 n 次这样的操作后，去掉的所有线段的长度总和大于 $\frac{99}{100}$，则 n 的最小值为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）

(A) 9　　(B) 10

(C) 11　　(D) 12



(10) 若函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{x}, & x\le 0 \\ ax^{2}-2x, & x>0 \end{cases}$ 的值域为 $[-\frac{1}{e},+\infty)$，则实数 a 的取值范围是

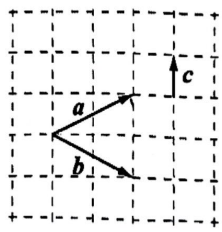
(A) $(0, e)$　　(B) $(e, +\infty)$　　(C) $(0, e]$　　(D) $[e, +\infty)$

二、填空题 共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分.

(11) 已知 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=2$，则 $\tan\theta=$ ______

(12) 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于直线 $y=x$ 对称，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$ ______.

(13) 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示. 若网格纸上小正方形的边长为 1，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ ______；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ______.



（14）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 和 $g(x)=\cos^2(x+\varphi)-\sin^2(x+\varphi)$ 的图象的对称中心完全重合，则 $\omega=$__________；$g(\frac{\pi}{6})=$____________.

（15）已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和是 S_n，$a_1=a$，且 $S_n=a_na_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）. 给出如下结论：

①$a_2=1$；

②$\{a_n\}$ 为递增数列；

③若 $\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_{n+1}>a_n$，则 a 的取值范围是 $(0,1)$；

④$\exists m\in \mathbf{N}^*$，使得当 $k>m$ 时，总有 $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}<1+\mathrm{e}^{-10}$.

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)（本小题 14 分）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，满足 $a_1=3,\ a_4=12$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=4,\ b_4=20$，且 $\{b_n-a_n\}$ 为等比数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{b_{2n}\}$ 的前 n 项和.

(17)（本小题 14 分）已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi\quad(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，$f(\frac{2\pi}{3})=1$，请从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 唯一确定.

条件 ①：$f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$；

条件 ②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$；

条件 ③：$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

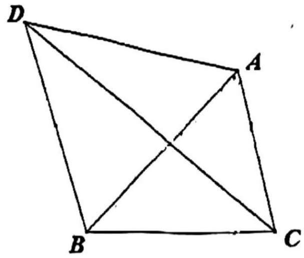
（Ⅰ）求 ω,φ 的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,t)$ 内有且仅有 1 个极大值点，求 t 的取值范围.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18) (本小题 14 分)

如图，$\triangle ABD$ 为正三角形，$AC // DB$，$AC=4$，$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



（Ⅰ）求$\sin\angle ACB$的值；

（Ⅱ）求AB，CD的长.

(19) (本小题 14 分) 已知函数$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$.

（Ⅰ）若$a=-4$，求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若$f(x)$在$x=-1$处取得极值，求$f(x)$的单调区间，并求其最大值与最小值.

(20) (本小题 14 分) 设l为曲线C：$y=(x-2)e^x$在$x=-1$处的切线.

（Ⅰ）求l的方程；

（Ⅱ）判断曲线C与直线l的公共点个数，并证明.

(21) (本小题 15 分)

设m为正整数，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j\,(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)−可分数列.

（Ⅰ）写出所有的(i,j)，$1\le i<j\le 6$，使数列$a_1,a_2,\cdots,a_6$是(i,j)−可分数列；

（Ⅱ）当$m\ge 3$时，证明：数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)$−可分数列；

（Ⅲ）证明：使数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)−可分数列的有序数对(i,j)至少有m^2+m+1个.

统练 3

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$， $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

（A） $\{x|-1<x<2\}$ （B） $\{x|-1<x\leqslant 2\}$

（C） $\{x|0\leqslant x<1\}$ （D） $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

（2）若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则 $z=$

（A） $-1-\mathrm{i}$ （B） $-1+\mathrm{i}$

（C） $1-\mathrm{i}$ （D） $1+\mathrm{i}$

（3）已知实数 a,b 满足 $a>b$，则下列不等式中正确的是

（A） $|a|>b$ （B） $a>|b|$ （C） $a^2>ab$ （D） $ab>b^2$

（4）已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$， $b=\log_2\frac{1}{3}$， $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则(　　)

（A） $a>b>c$ （B） $a>c>b$ （C） $c>a>b$ （D） $c>b>a$

（5）已知函数 $f(x)=\log_2 x-x^2+2x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为

(A) $(1,4)$ (B) $(0,1)\cup(4,+\infty)$

(C) $(1,2)$ (D) $(0,1)\cup(2,+\infty)$

（6）若 P 是△ABC 内部或边上的一个动点，且 $\overline{AP}=x\overline{AB}+y\overline{AC}$，则 xy 的最大值是

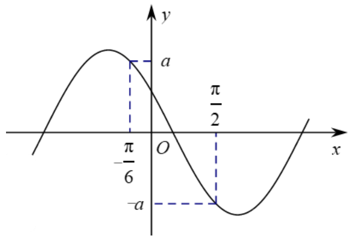
（A） $\frac{1}{4}$ （B） $\frac{1}{2}$ （C） 1 （D） 2

（7）无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差为 d，则“S_n 有最大值”是“$d<0$”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（8）已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象.若函数 $y=f(x)$ 为奇函数，则 t 的最小值是

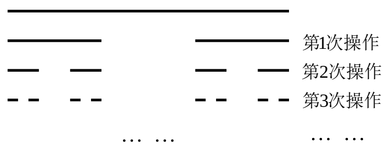


（A）$\frac{\pi}{12}$　　（B）$\frac{\pi}{6}$

（C）$\frac{\pi}{4}$　　（D）$\frac{\pi}{3}$

（9）我们可以用下面的方法在线段上构造出一个特殊的点集：如图，取一条长度为 1 的线段，第 1 次操作，将该线段三等分，去掉中间一段，留下两段；第 2 次操作，将留下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留下四段；按照这种规律一直操作下去. 若经过 n 次这样的操作后，去掉的所有线段的长度总和大于 $\frac{99}{100}$，则 n 的最小值为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）



（A）9　　（B）10

（C）11　　（D）12

（10）若函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{x}, & x\le 0 \\ ax^{2}-2x, & x>0 \end{cases}$ 的值域为 $[-\frac{1}{e},+\infty)$，则实数 a 的取值范围是

（　　）

（A）(0, e)　　（B）(e, +∞)　　（C）(0, e]　　（D）[e, +∞)

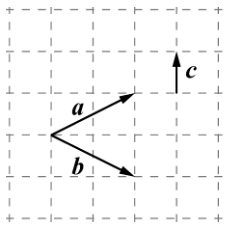
二、填空题 共 5 道小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11 ）已知 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=2$，则 $\tan\theta=$ ______-3

（12）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于直线 $y=x$ 对称，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$ ________. $\frac{3}{5}$

（13）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若网格纸上小正方形的边长为1，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ ____0____；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ____3____.



（14）若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 和 $g(x)=\cos^2(x+\varphi)-\sin^2(x+\varphi)$ 的图象的对称中心完全重合，则 $\omega=$____2____； $g(\frac{\pi}{6})=$____±1____.

（15）已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和是 S_n， $a_1=a$， 且 $S_n=a_na_{n+1}$（ $n=1,2,\cdots$ ）. 给出如下结论：

① $a_2=1$；

② $\{a_n\}$ 为递增数列；

③若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$， $a_{n+1}>a_n$， 则 a 的取值范围是 $(0,1)$；

④ $\exists m\in\mathbf{N}^*$， 使得当 $k>m$ 时， 总有 $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}<1+\mathrm{e}^{-10}$.

其中，所有正确结论的序号是________. ①③④

三、解答题 共 6 道小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分) 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，满足 $a_1=3,\ a_4=12$， 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=4,\ b_4=20$， 且 $\{b_n-a_n\}$ 为等比数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{b_{2n}\}$ 的前 n 项和.

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d， 由题意得

$$d=\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{12-3}{3}=3.$$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n\ \ (n=1,2,\cdots)$.

设等比数列 $\{b_n-a_n\}$ 的公比为 q， 由题意得

$q^3=\frac{b_4-a_4}{b_1-a_1}=\frac{20-12}{4-3}=8$， 解得 $q=2$.

所以 $b_n-a_n=(b_1-a_1)q^{n-1}=2^{n-1}$.

从而 $b_n=3n+2^{n-1}\ \ (n=1,2,\cdots)$. 8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_{2n}=6n+2^{2n-1}\ \ (n=1,2,\cdots)$.

数列 $\{6n\}$ 的前 n 项和为 $3n(n+1)$， 数列 $\{2^{2n-1}\}$ 的前 n 项和为 $2\times\frac{4^n-1}{4-1}=\frac{2}{3}(4^n-1)$.

所以，数列 $\{b_{2n}\}$ 的前 n 项和为 $3n(n+1)+\frac{2}{3}(4^n-1)$. 6 分

(17) (本小题 14 分) 已知函数 $f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi\quad(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，$f(\frac{2\pi}{3})=1$，请从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 唯一确定.

条件 ①：$f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$；

条件 ②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$；

条件 ③：$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

（Ⅰ）求 ω,φ 的值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,t)$ 内有且仅有1个极大值点，求 t 的取值范围.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（Ⅰ）选择条件 ②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$.

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，所以 $f(x)$ 的最小值为 -1，最大值为 1，

又因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $f(-\frac{\pi}{3})=-1$，$f(\frac{2\pi}{3})=1$，

所以由三角函数的性质得 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$，故 $T=2\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，$f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.　　10 分

选择条件 ③：$f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减.

因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，所以 $f(x)$ 的最小值为 -1，最大值为 1.

由题意得 $f(-\frac{\pi}{3})=-1$，又因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增，且 $f(\frac{2\pi}{3})=1$，

所以由三角函数的性质得 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$，故 $T=2\pi$.

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，$f(x)=\sin(x+\varphi)$.

由 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.　　10 分

（Ⅱ）因为$x \in (0,t)$，所以$x-\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, t-\frac{\pi}{6})$，

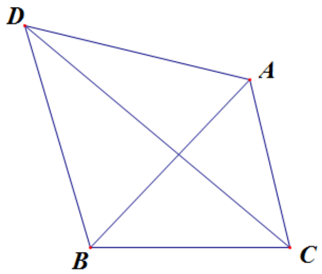
由题意可得$t-\frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$，所以$t$的取值范围是$(\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$.　　4 分

(18) (本小题 14 分)

如图，$\triangle ABD$为正三角形，$AC//DB$，$AC=4$，$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

（Ⅰ）求$\sin\angle ACB$的值；

（Ⅱ）求AB，CD的长.



解：（Ⅰ）因为$\triangle ABD$为正三角形，$AC//DB$，所以在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，

所以$\angle ACB=\pi-(\frac{\pi}{3}+\angle ABC)$.

所以$\sin\angle ACB=\sin(\frac{\pi}{3}+\angle ABC)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\angle ABC+\cos\frac{\pi}{3}\sin\angle ABC)$

因为在$\triangle ABC$中，$\cos\angle ABC=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\angle ABC\in(0,\pi)$

所以$\sin\angle ABC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.　　7 分

（Ⅱ）在$\triangle ABC$中，$AC=4$，由正弦定理得：$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，

所以$AB=\frac{AC\bullet\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{4\times\frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=5$

又在正$\triangle ABD$中，$AB=AD$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，

所以在△ ADC 中，$\angle DAC=\dfrac{2\pi}{3}$，

由余弦定理得：$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle DAC$

$$=16+25-2\times4\times5\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=61$$

所以 CD 的长为 $\sqrt{61}$． 7 分

(19) (本小题 14 分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$．

（Ⅰ）若 $a=-4$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f(x)$ 的单调区间，并求其最大值与最小值．

解：（Ⅰ）$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2-4}$，$f'(x)=\dfrac{2x^2-6x+8}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{2}}{(x^2-4)^2}$，

所以 $f'(x)>0$ 恒成立．

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $(-\infty,-2)$，$(-2,2)$，$(2,+\infty)$，无递减区间． 5 分

（Ⅱ）由 $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+a}$ 得 $f'(x)=\dfrac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2}=\dfrac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$．

由题意知 $f'(-1)=0$，所以 $(-1)^2-3\times(-1)-a=0$．故 $a=4$．

当 $a=4$ 时，$f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+4}$，$f'(x)=\dfrac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$．

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

因此，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(4,+\infty)$，单调递减区间是 $(-1,4)$．

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上的最大值是 $f(-1)=1$．

又因为当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(-1)=1$ 是 $f(x)$ 的最大值．

同理可知，$f(4)=-\dfrac{1}{4}$ 是 $f(x)$ 的最小值． 9 分

(20) (本小题 14 分) 设 l 为曲线 C： $y=(x-2)\mathrm{e}^x$ 在 $x=-1$ 处的切线.

（Ⅰ）求 l 的方程；

（Ⅱ）判断曲线 C 与直线 l 的公共点个数，并证明.

解：（Ⅰ）设 $f(x)=(x-2)e^x, f'(x)=(x-1)e^x, f'(-1)=-\frac{2}{e}, f(-1)=-\frac{3}{e}$

所以切线 l 为 $y=-\frac{2}{e}x-\frac{5}{e}$　　　5 分

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-(-\frac{2}{e}x-\frac{5}{e})=(x-2)e^x+\frac{2}{e}x+\frac{5}{e}$

$g'(x)=(x-1)e^x+\frac{2}{e}, g''(x)=xe^x$，令 $g''(x)=0, x=0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	↓	极小	↑

$g'(x)$ 最小 $=g'(0)<0, g'(-1)=0$，$g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 有且仅有一个变号零点 -1

$g'(x)$ 最小 $=g'(0)<0, g'(1)=\frac{2}{e}>0$，$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个变号零点 $x_0\in(0,1)$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	
$g(x)$	↑	极大	↓	极小	↑

$g(-1)=0$，$g(x_0)<g(-1)=0$，$g(2)=\frac{9}{e}>0$

因此 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,x_0)$ 无零点，在 $(x_0,+\infty)$ 恰有一个变号零点 $x_1\in(x_0,2)$，

综上，$g(x)$ 恰有 2 个零点 -1 与 x_1.　　　9 分

(21) (本小题 15 分)

设 m 为正整数，数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j\ (i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)－可分数列.

（Ⅰ）写出所有的 (i,j)，$1\le i<j\le 6$，使数列 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是 (i,j)－可分数列；

（Ⅱ）当 $m\ge 3$ 时，证明：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)$－可分数列；

（Ⅲ）证明：使数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 (i,j)－可分数列的有序数对 (i,j) 至少有 m^2+m+1 个.

【解】（Ⅰ）不失一般性，可设 $a_k=k\left(k=1,2,\cdots,4m+2\right)$，

相当于从 $1,2,3,4,5,6$ 中取出两个数 i 和 $j\left(i<j\right)$，使得剩下四个数是等差数列.

那么剩下四个数只可能是 $1,2,3,4$，或 $2,3,4,5$，或 $3,4,5,6$.

所以所有可能的 (i,j) 是 $(1,2),(1,6),(5,6)$.　　4 分　（每个 1 分；若有错误，至多给 3 分）

（Ⅱ）从数列 $1,2,\cdots,4m+2$ 中取出 2 和 13 后，剩余的 $4m$ 个数可分为以下两个部分：

$\{1,4,7,10\},\{3,6,9,12\},\{5,8,11,14\}$，共 3 组；　　3 分

$\{15,16,17,18\},\{19,20,21,22\},\ldots,\{4m-1,4m,4m+1,4m+2\}$，共 $m-3$ 组.　　2 分

共 m 组，易知每组都成等差数列，故数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,13)-$ 可分数列.

（Ⅲ）首先证明引理：数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$ 是 $(2,4k+1)-$ 可分数列（$2\le k\le m$）.

先考虑 $a_1\sim a_{4k+2}$，当 $k=2$ 时，去掉 a_2,a_9 后，分为两组 $(a_1,a_3,a_5,a_7),(a_4,a_6,a_8,a_{10})$；

当 $k\ge 3$ 时，将这 $4k+2$ 项去掉 a_2,a_{4k+1} 后，分为如下 k 组：

$(a_1,a_{k+1},a_{2k+1},a_{3k+1}),(a_3,a_{k+3},a_{2k+3},a_{3k+3}),(a_4,a_{k+4},a_{2k+4},a_{3k+4}),\ldots,(a_k,a_{2k},a_{3k},a_{4k})$ 及

$(a_{k+2},a_{2k+2},a_{3k+2},a_{4k+2})$；

再将 $a_{4k+3}\sim a_{4m+2}$ 按角标从小到大每连续四项分为一组，共 $m-k$ 组.

经检验，上述 m 组，每组的四项都成等差数列。引理证毕.

一方面，由引理可得，原数列是 $(4l+2,4k+1)-$ 可分数列，其中 $k-l\ge 2$，只需将 $a_1\sim a_{4l}$ 按角标从小到大每连续四项分为一组，其余同引理。　　3 分

另一方面，原数列必是 $(4k+1,4l+2)-$ 可分数列（$0\le k\le l\le m$），因为去掉 a_{4k+1},a_{4l+2} 后，还剩下三部分 $a_1\sim a_{4k},a_{4k+2}\sim a_{4l+1},a_{4l+3}\sim a_{4m+2}$，由于每部分的项数均为 4 的倍数，所以每部分都可以按角标从小到大，连续四项分为一组即可。　2 分

综上所述，有序数对 (i,j) 至少有 $A_{m+1}^2+m+1-m=m^2+m+1$.　　1 分