试卷编号：11053

北京一零一中2024-2025学年度第一学期高二数学统练一

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

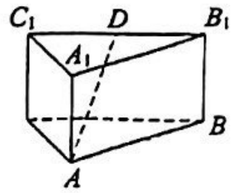
一、选择题共10小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $A(1,2,1)$，$B(-1,2,-1)$，则（　　）

(A) 直线 AB // 坐标平面 xOy　　(B) 直线 $AB\perp$ 坐标平面 xOy

(C) 直线 AB // 坐标平面 xOz　　(D) 直线 $AB\perp$ 坐标平面 xOz

2. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 B_1C_1 的中点．设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）



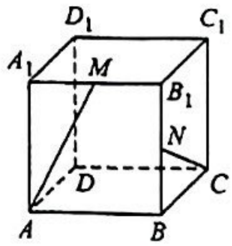
(A) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(C) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(D) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

3. 已知 a,b 为两条直线，α,β 为两个平面，且满足 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，a // l，则"a 与 b 异面"是"直线 b 与 l 相交"的（　　）

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

4. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点，那么直线 AM 与 CN 夹角的余弦值为（　　）



(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(C) $\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{2}{5}$

5. 在正四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 与底面 BCD 所成角的正弦值为（　　）

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 正四棱锥的侧棱长是底面边长的 k 倍，则 k 的取值范围是（　　）

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(\frac{1}{2},+\infty)$　　(C) $(\sqrt{2},+\infty)$　　(D) $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

7. 在某次数学探究活动中，小明先将一副三角板按照图1的方式进行拼接，然后他又将三角板 ABC 折起，使得二面角 $A-BC-D$ 为直二面角，得图2所示四面体 $ABCD$．小明对四

面体 $ABCD$ 中的直线、平面的位置关系作出了如下的判断: ① $CD\perp$ 平面 ABC; ② $AB\perp$ 平面 ACD; ③平面 $ABD\perp$ 平面 ACD; ④平面 $ABD\perp$ 平面 BCD. 其中判断正确的个数是(　　)

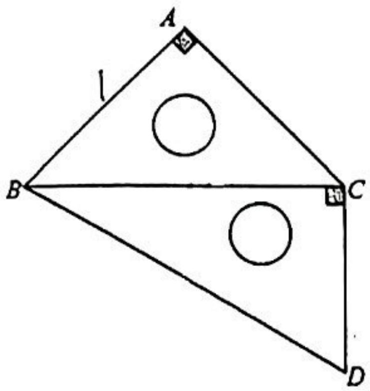


图 1

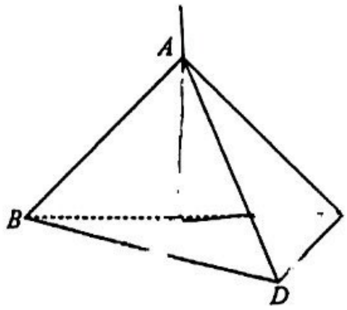
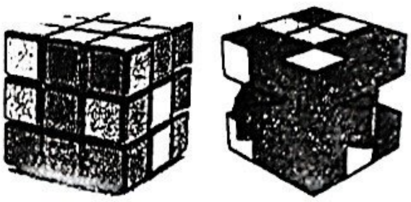


图 2

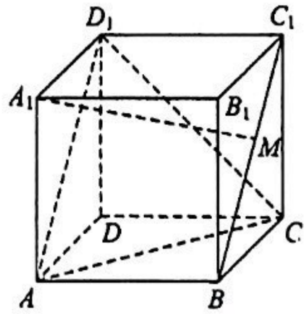
(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

在 2023 年 3 月 12 日马来西亚吉隆坡举行的 Yong Jun KL Speedcubing 比赛半决赛中, 来自中国的 9 岁魔方天才王艺衡以 4.69 秒的成绩打破了"解三阶魔方平均用时最短"吉尼斯世界纪录称号. 如图, 一个三阶魔方由 27 个单位正方体组成, 把魔方的中间一层转动了 45° 之后, 表面积增加了(



(A) 54　　(B) $54-36\sqrt{2}$　　(C) $108-72\sqrt{2}$　　(D) $81-72\sqrt{2}$

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 在线段 BC_1 (不含端点) 上运动, 则下列结论正确的是(　　)



① $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球表面积为 48π;

②异面直线 A_1M 与 AD_1 所成角的取值范围是 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$;

③直线 A_1M // 平面 ACD_1;

④三棱锥 D_1-AMC 的体积随着点 M 的运动而变化.

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②③　　(D) ③④

6如图 1, 某同学在一张矩形卡片上绘制了函数 $f(x)=\sin(\pi x+\frac{5\pi}{6})$ 的部分图象, A, B 分别是 $f(x)$ 图象的一个最高点和最低点, M 是 $f(x)$ 图象与 y 轴的交点, $BD\perp OD$, 现将该卡片沿 x 轴折成如图 2 所示的直二面角 $A-OD-B$. 在图 2 中, 下列结果不正确的是(　　)

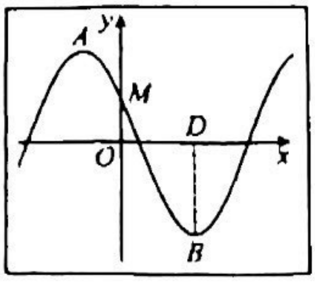


图1

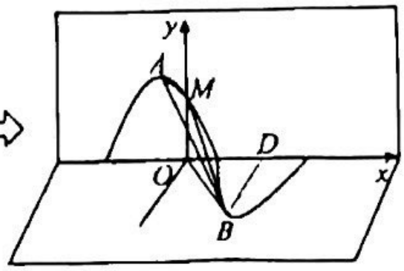


图2

(A) $AB=\sqrt{3}$

(B) 点 D 到平面 ABM 的距离为 $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$

(C) 点 D 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

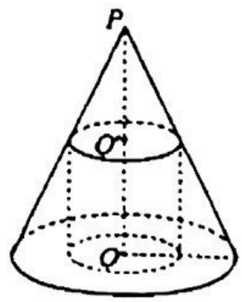
(D) 平面 OBD 与平面 ABM 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

二、填空题共 6 小题。

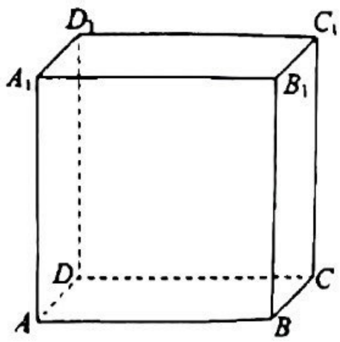
11. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是空间向量，若 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ________.

12. 三个空间向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，且存在实数 x,y,z，使 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $x^2+y^2+z^2=$ ________.

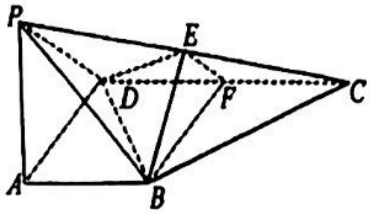
13. 如图，圆锥 PO 的体积为 V_1，过 PO 的中点 O' 作平行于底面的截面，以该截面为底面挖去一个圆柱，设圆柱体积为 V_2，则 $V_1:V_2=$ ________



14. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$BC=1$，点 P 在侧面 A_1ABB_1 上，若点 P 到直线 AA_1 和 CD 的距离相等，则 A_1P 的最小值是 ________



15. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $\angle DAB$ 为直角, $AB\parallel CD$, $AD=CD=2AB$, E,F 分别为 PC,CD 的中点, $PA=kAB\ (k>0)$, 且二面角 $E-BD-C$ 的平面角大于 $30°$, 则 k 的取值范围是 ________.



16. 已知单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 两两的夹角均为 $\theta\ (0<\theta<\pi,\theta\neq\frac{\pi}{2})$, 若空间向量 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\ (x,y,z\in\mathbf{R})$, 则有序实数组 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在"仿射"坐标系 $Oxyz$ (O 为坐标原点) 下的"仿射"坐标, 记作 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)_\theta$, 给出下列四个结论:

①已知 $\boldsymbol{a}=(1,3,-2)_\theta$, $\boldsymbol{b}=(4,0,2)_\theta$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

②已知 $\boldsymbol{a}=(x,y,0)_{\frac{\pi}{3}}$, $\boldsymbol{b}=(0,0,z)_{\frac{\pi}{3}}$, 其中 $x,y,z>0$, 则当且仅当 $x=y$ 时, 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角取得最小值;

③已知 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)_\theta$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)_\theta$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)_\theta$;

④已知 $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)_{\frac{\pi}{3}}$, $\overrightarrow{OB}=(0,1,0)_{\frac{\pi}{3}}$, $\overrightarrow{OC}=(0,0,1)_{\frac{\pi}{3}}$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的表面积 $S=\sqrt{2}$.

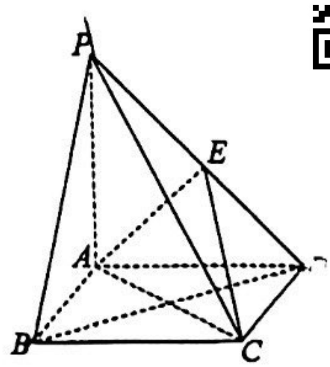
其中所有正确结论的序号是 ________.

三、解答题共 2 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BD\perp PC$, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$, E 是棱 PD 上的动点, 且 $PE=\lambda PD$.

(1) 证明: $PA\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 是否存在实数 λ, 使得平面 PAB 与平面 AEC 所成夹角的余弦值是 $\frac{2}{3}$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



18. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2. E 为 BC 的中点, 点 M 在 BD_1 上. 再从下列三个条件中选择一个作为已知, 使点 M 唯一确定, 并解答问题.

条件①: $MA=MC$;

条件②: $EM\perp AD$;

条件③: $EM\parallel$ 平面 CDD_1C_1.

(1) 求证: M 为 BD_1 的中点;

(2) 求直线 EM 与平面 MCD 所成角的大小, 及点 E 到平面 MCD 的距离.