

本试卷共 4 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $1 + \frac{1}{i}$ 在复平面上对应的点的坐标为()

- A. (1,1) B. (-1,1) C. (-1,-1) D. (1,-1)

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -1)$ ，则 $\cos \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 如图，八面体的每个面都是正三角形，并且 4 个顶点 A, B, C, D 在同一平面内，若四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，则这个八面体的表面积为()

- A. 8 B. 16 C. $8\sqrt{3}$ D. $16\sqrt{3}$

4. 已知圆锥的母线长为 5，底面圆的半径为 3，则该圆锥的体积为()

- A. 12π B. 15π C. 36π D. 45π

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 A_1C_1 与直线 B_1C 所成角的大小为()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

6. 已知 l, m 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是()

- A. 若 $m \perp \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 $m \parallel \beta$ B. 若 $\alpha \cap \beta = l$, $l \parallel m$, 则 $m \parallel \beta$
C. 若 $m \subset \alpha$, $\alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \beta$ D. 若 $m \perp \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp \beta$

7. 已知空间中的不过同一点的三条直线 l, m, n 。“ l, m, n 共面”是“ l, m, n 两两相交”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

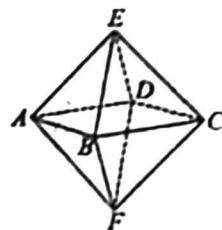
8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F 分别是 AB, CC_1 的中点，则下列说法正确的是()

- A. $A_1E \parallel$ 平面 BFD_1 B. $A_1E \perp$ 平面 ADF

- C. A_1, E, B, F 四点共面 D. 直线 EF 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

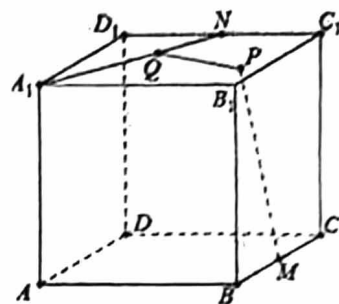
9. 四面体 $ABCD$ 的一条棱长为 x ，其余棱长均为 2，记四面体 $ABCD$ 的表面积为 $F(x)$ ，则函数 $F(x)$ 的最大值为()

- A. $6 + 2\sqrt{3}$ B. $4 + 2\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$



10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M, N 分别是棱 BC, C_1D_1 的中点, 点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 点 Q 在线段 A_1N 上. 若 $PM = \sqrt{5}$, 则 PQ 长度的最小值为()

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}-1$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

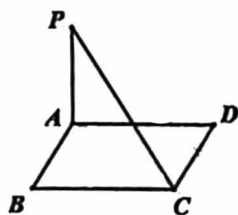


二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. 已知长方体的长、宽、高分别为 3, 2, 1, 则它的体对角线长为_____.

12. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AD = 4, CD = 3, PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = \sqrt{11}$,

则 PC 的长为_____.



13. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, 则直线 AA_1 与 BC_1 所成角的大小为_____;

点 A 到平面 BB_1C_1C 的距离为_____.

14. 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内剪去四个全等的等腰三角形(如图 1 中阴影部分), 折叠成底面边长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱锥 $S-EFGH$ (如图 2), 则正四棱锥 $S-EFGH$ 的体积为_____.

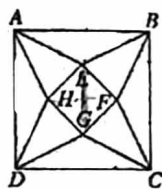


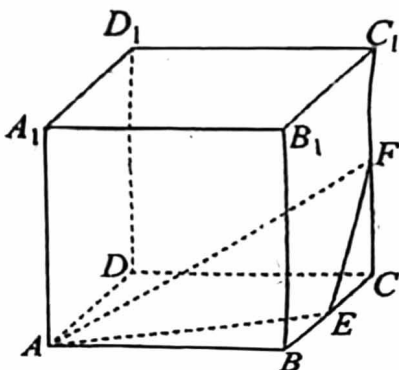
图 1



图 2



15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, E 为 BC 的中点, F 为线段 CC_1 上的动点, 过点 A, E, F 的平面截该正方体所得截面记为 S , 当 $CF = 3$ 时, 截面 S 与 AD_1, C_1D_1 分别交于 M, N , 则 $MN =$ _____.



三、解答题:本大题共 4 小题, 共 45 分.解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

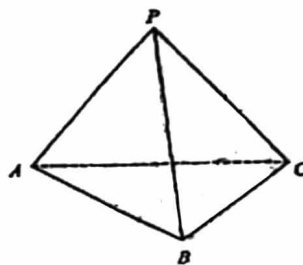
16. (本小题满分 10 分)

已知正三棱锥 $P-ABC$, 请从条件①, 条件②, 条件③中选择两个条件作为已知, 使三棱锥存在, 并求出此正三棱锥的体积.

①底面边长为 2;

②侧棱长为 $\sqrt{3}$;

③斜高为 2.



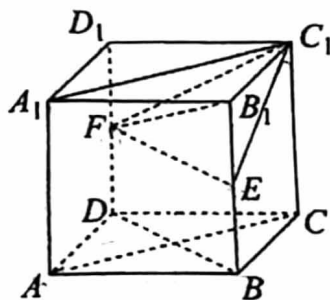
17. (本小题满分 10 分)

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别是棱 BB_1, DD_1 的中点.

求证:

(I) $BD \parallel$ 平面 C_1EF ;

(II) $EF \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;



18. (本小题满分 15 分)

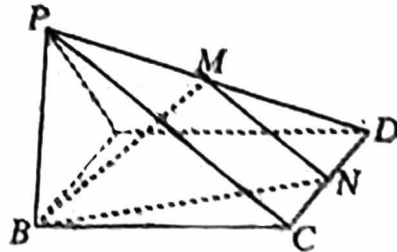
如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 侧面 PAB 是正三角形,

M 是 PD 上一动点, N 是 CD 的中点.

(I) 若 $PC \parallel$ 平面 $BAMN$, 求证: M 是 PD 的中点;

(II) 若平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 求线段 PC 的长;

(III) 是否存在点 M , 使得 $PC \perp BM$? 若存在, 求出 $\frac{PM}{MD}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



19. (本小题满分 10 分)

已知定义在 R 上的函数 $f(x), g(x)$ 满足以下三个条件:

① $f(x-y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$;

② $g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$;

③ 存在集合 $\{a, b\} \subsetneq \{g(x) | x \in R\}$.

(I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

(II) 求 $f(0), g(0)$ 的值.

(III) 判断命题 p : “ $g(x)$ 是周期函数” 的真假, 并说明理由.

