



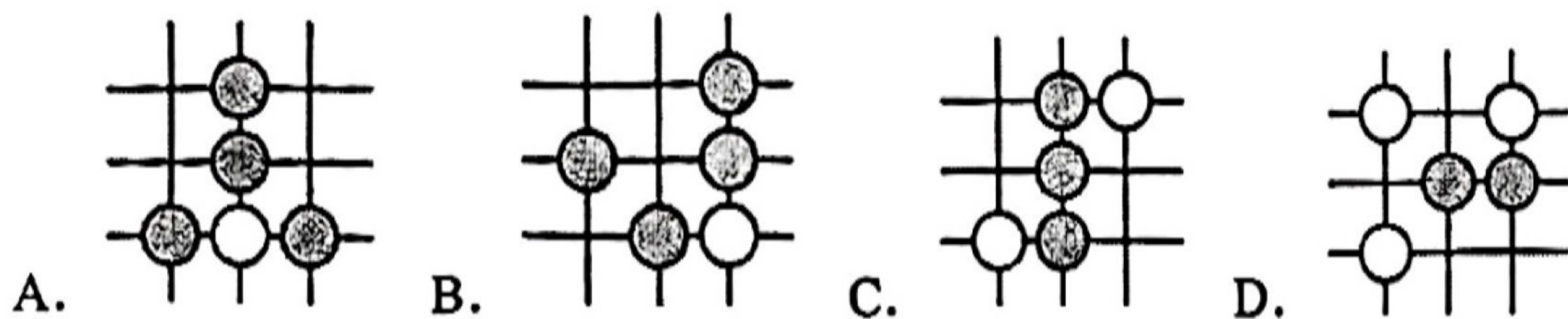
数学

(清华附中初 22 级) 2024.09

一. 选择题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

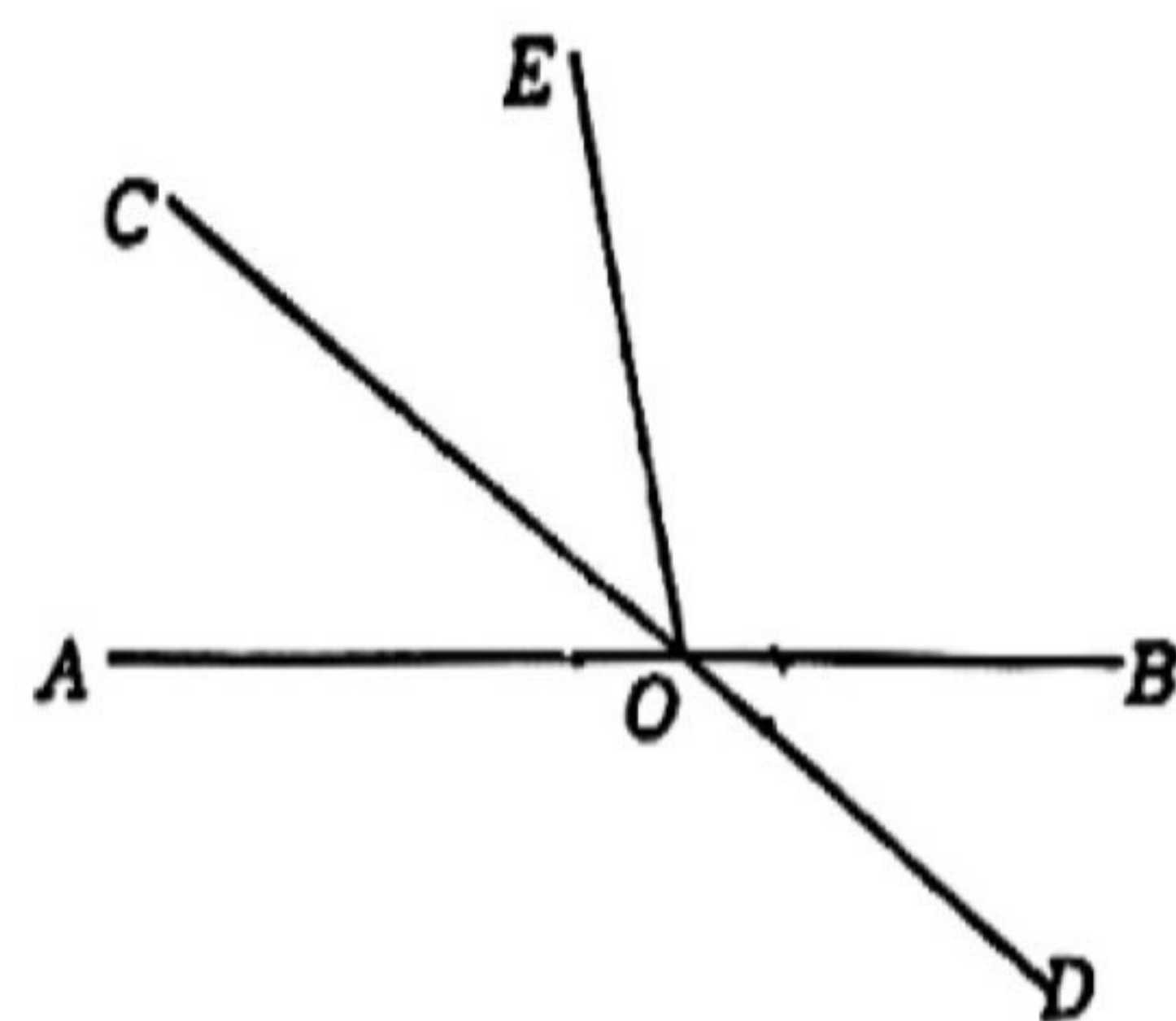
第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 围棋起源于中国, 古代称之为“弈”, 至今已有 4000 多年的历史. 以下是在棋谱中截取的四个部分, 由黑白棋子摆成的图案是中心对称图形的是 ()



2. 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , OC 平分 $\angle AOE$, $\angle BOD = 35^\circ$, 则 $\angle BOE$ 的度数为 ()

A. 95° B. 100° C. 110° D. 145°



3. 已知 $m+3 < 0$, 则下列结论正确的是 ()

A. $-3 < m < -m < 3$ B. $m < -3 < -m < 3$ C. $-3 < m < 3 < -m$ D. $m < -3 < 3 < -m$

4. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k < 1$ B. $k \leq 1$ C. $k < 1$ 且 $k \neq 0$ D. $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

5. 正六边形的外角和是 ()

A. 720° B. 540° C. 360° D. 180°

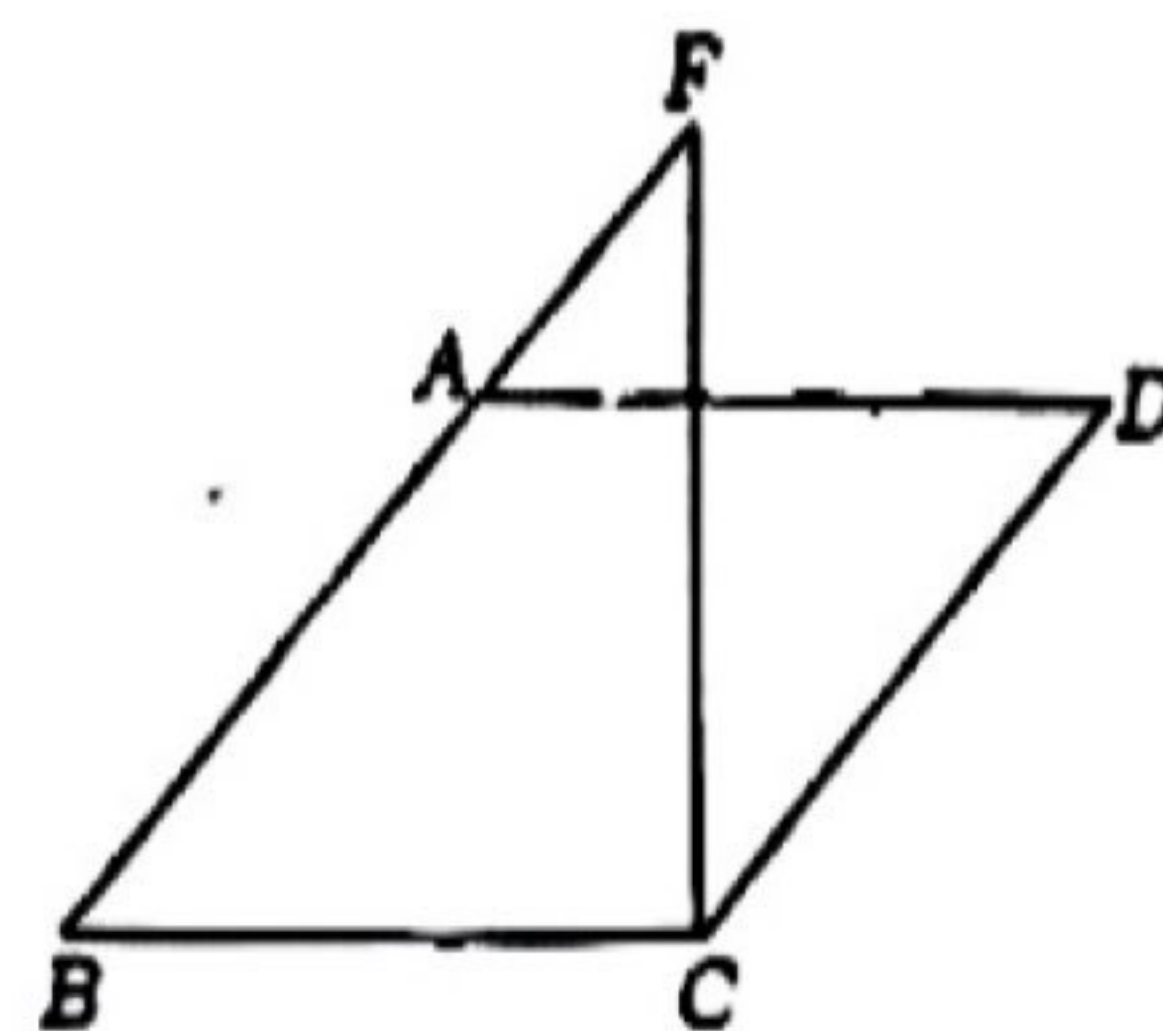
6. 2024 年第 33 届巴黎奥运会是史上第一届男女比例完全平衡的奥运会, 参赛的男女运动员分别为 5250 名, 本届奥运会的运动员总数为 ()

A. 5.25×10^3 B. 5.25×10^4 C. 1.5×10^4 D. 1.05×10^4

7. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 射线 CE 交 BA 的延长线于点 F , 若 $\frac{AE}{ED} = \frac{1}{2}$,

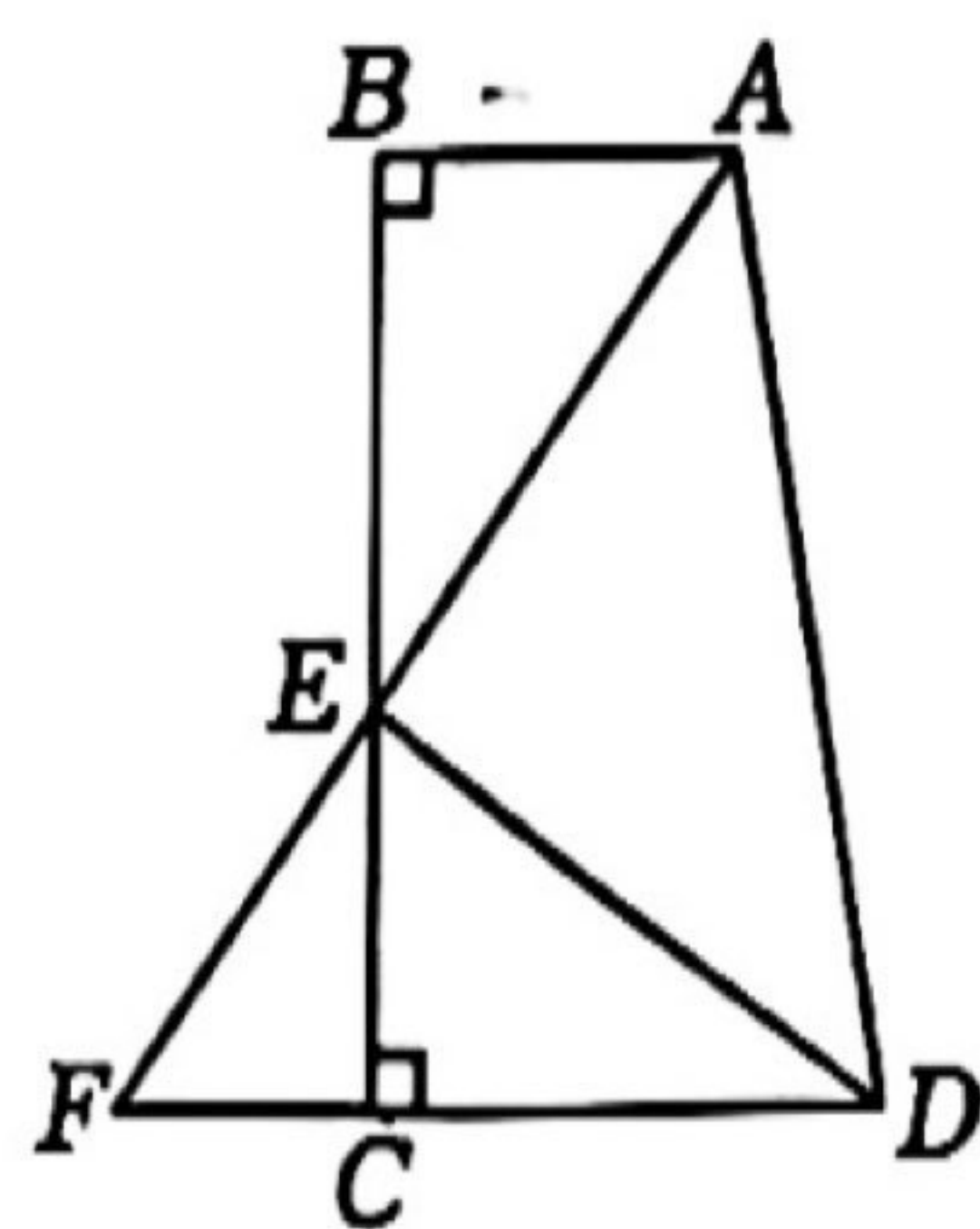
$AB = 3$, 则 AF 的长为 ()

A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2





8. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$, 点 E 在 BC 上, $CE < BE$, 连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F , 连接 DE , 若 $\triangle ABE \cong \triangle ECD$. 给出下面三个结论: ① $AE \perp DE$; ② $AB + CD > AE$; ③ $\sqrt{2} AB \cdot EF = AD \cdot CF$. 上述结论中, 所有正确结论的序号是 ()



- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

二. 填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 若代数式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是 _____.

10. 因式分解: $x^3 + 6x^2 + 9x =$ _____.

11. 方程 $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+3} = 0$ 的解为 _____.

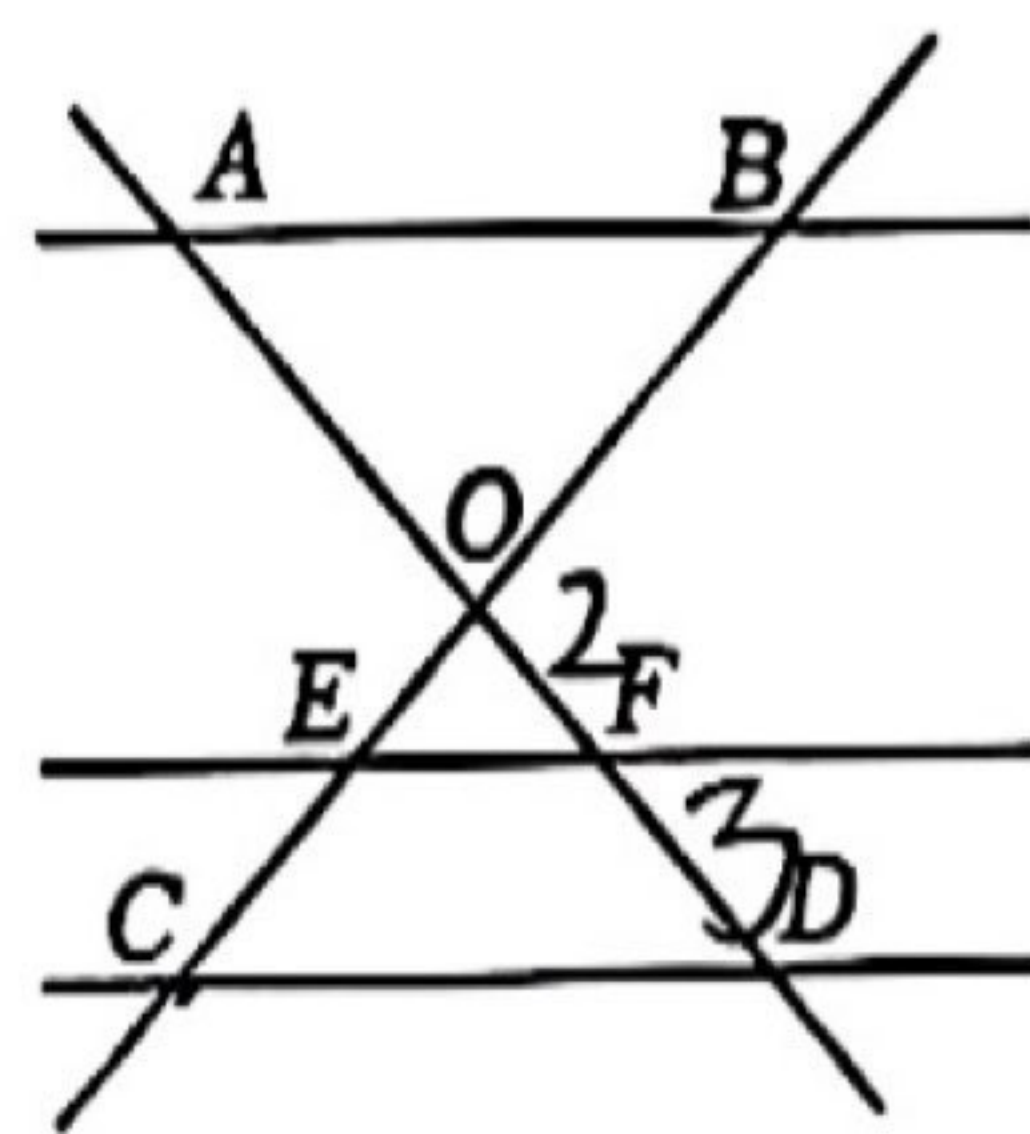
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = (k-2)x + 1$ 的图象经过点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$, 如果 $y_1 < y_2$, 那么 k 的取值范围是 _____.

13. 某农科所试验田有 3 万棵水稻. 为了考查水稻穗长的情况, 于同一天从中随机抽取了 50 个稻穗进行测量, 获得了它们的长度 x (单位: cm), 数据整理如下:

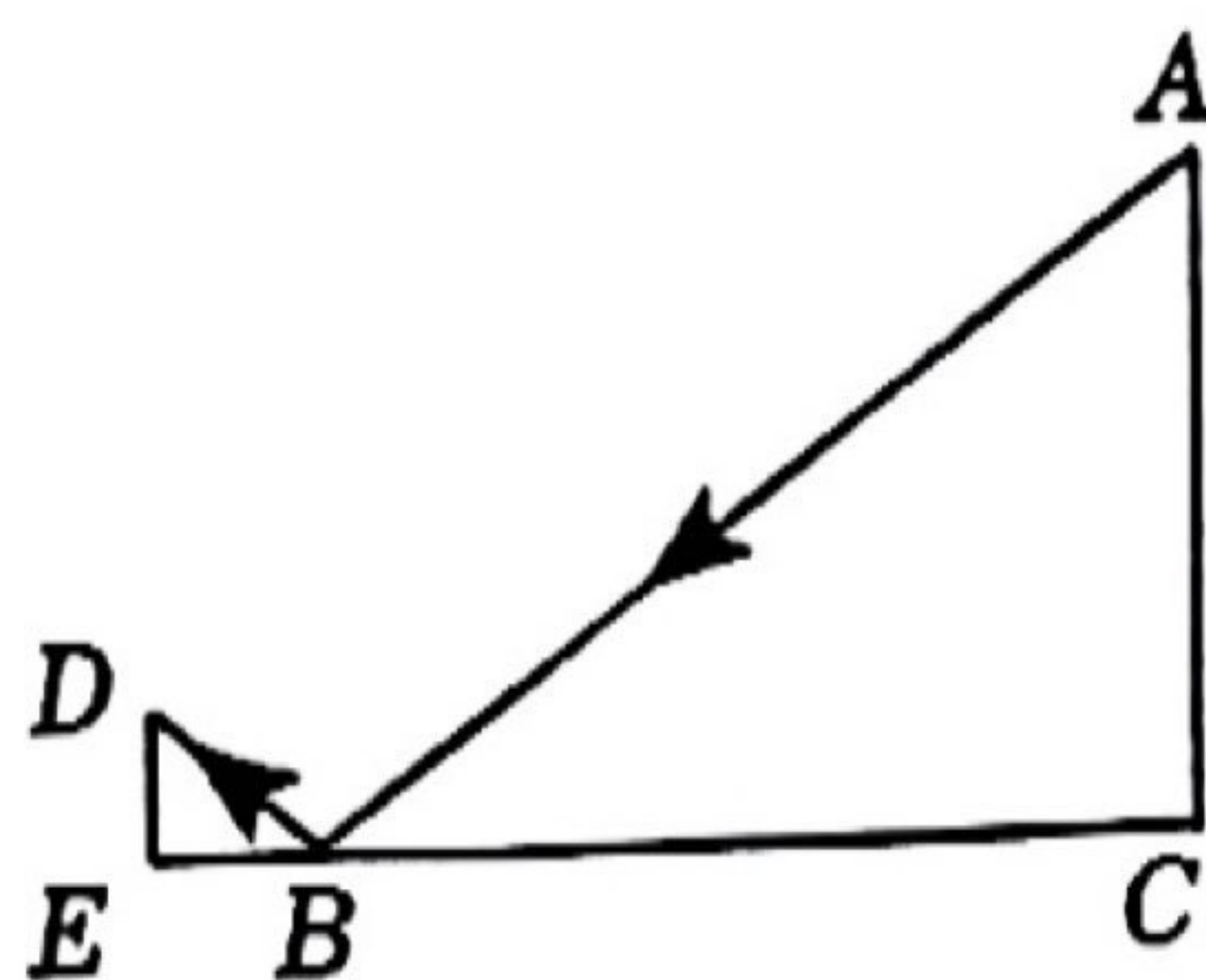
稻穗长度	$x < 5.0$	$5.0 \leq x < 5.5$	$5.5 \leq x < 6.0$	$6.0 \leq x < 6.5$	$x \geq 6.5$
稻穗个数	5	8	16	14	7

根据以上数据, 估计此试验田的 3 万棵水稻中“良好”(穗长在 $5.5 \leq x < 6.5$ 范围内) 的水稻数量为 _____ 万棵.

14. 如图, 直线 AD, BC 交于点 O , $AB \parallel EF \parallel CD$, 若 $AO = 5$, $OF = 2$, $FD = 3$, 则 $\frac{BE}{EC}$ 的值为 _____.



15. 综合实践课上, 小宇设计用光学原理来测量公园假山的高度, 把一面镜子放在与假山 AC 距离为 21 米的 B 处, 然后沿着射线 CB 退后到点 E , 这时恰好在镜子里看到山头 A , 利用皮尺测量 $BE = 2.4$ 米, 若小宇的身高是 1.6 米, 则假山 AC 的高度为 _____ 米.





16. 车间里有五台车床同时出现故障. 已知一个修理工修理每台车床的时间如下表所示:

车床代号	A	B	C	D	E
修复时间(分钟)	15	8	29	7	10

若每台车床停产一分钟造成经济损失 10 元, 修复后即可投入生产.

若只有一名修理工, 则下列三个修复车床的顺序中:

① $D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C$; ② $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B$; ③ $C \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D$,

经济损失最少的是 _____ (填序号):

若有两名修理工, 他们可以同时修理车床, 但每台车床只由一名修理工修理, 则最少的经济损失为 _____ 元.

三. 解答题 (本题共 68 分, 第 17-19 题, 每题 5 分, 第 20-21 题, 每题 6 分, 第 22-23 题, 每题 5 分, 第 24 题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分)

17. 计算: $(2024 - \pi)^0 + |\sqrt{3} - 1| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \sqrt{12}$.

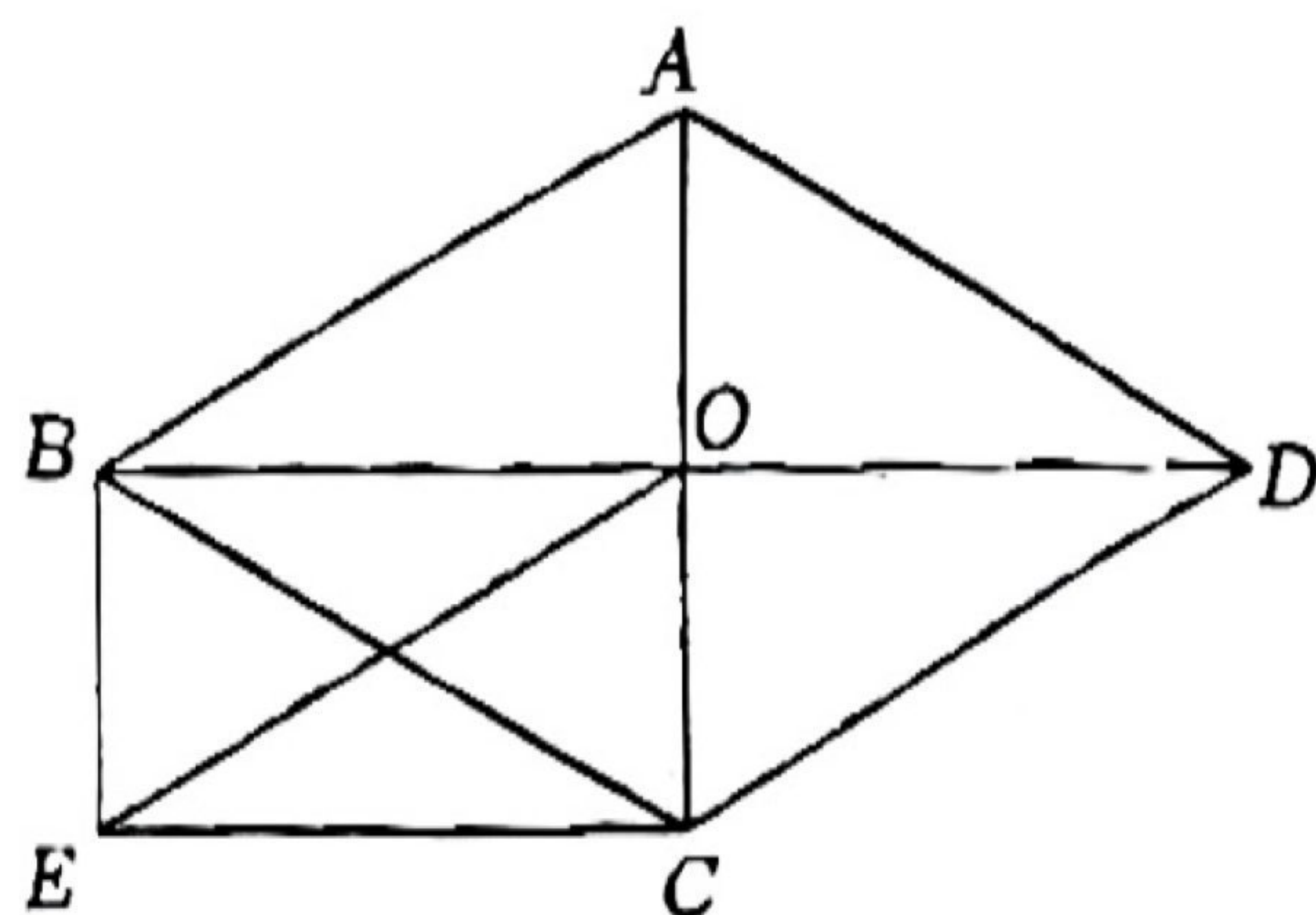
18. 解不等式组
$$\begin{cases} 2(x+1) \leq 5x+8 \\ 2x-5 < \frac{x-1}{2} \end{cases}$$

19. 先化简, 再求值: $\left(1 - \frac{2}{x-1}\right) + \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x}$, 其中 $x=5$.

20. 如图, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , BC , EO 为矩形 $BECO$ 对角线, $BC \parallel AD$, $AD = EO$.

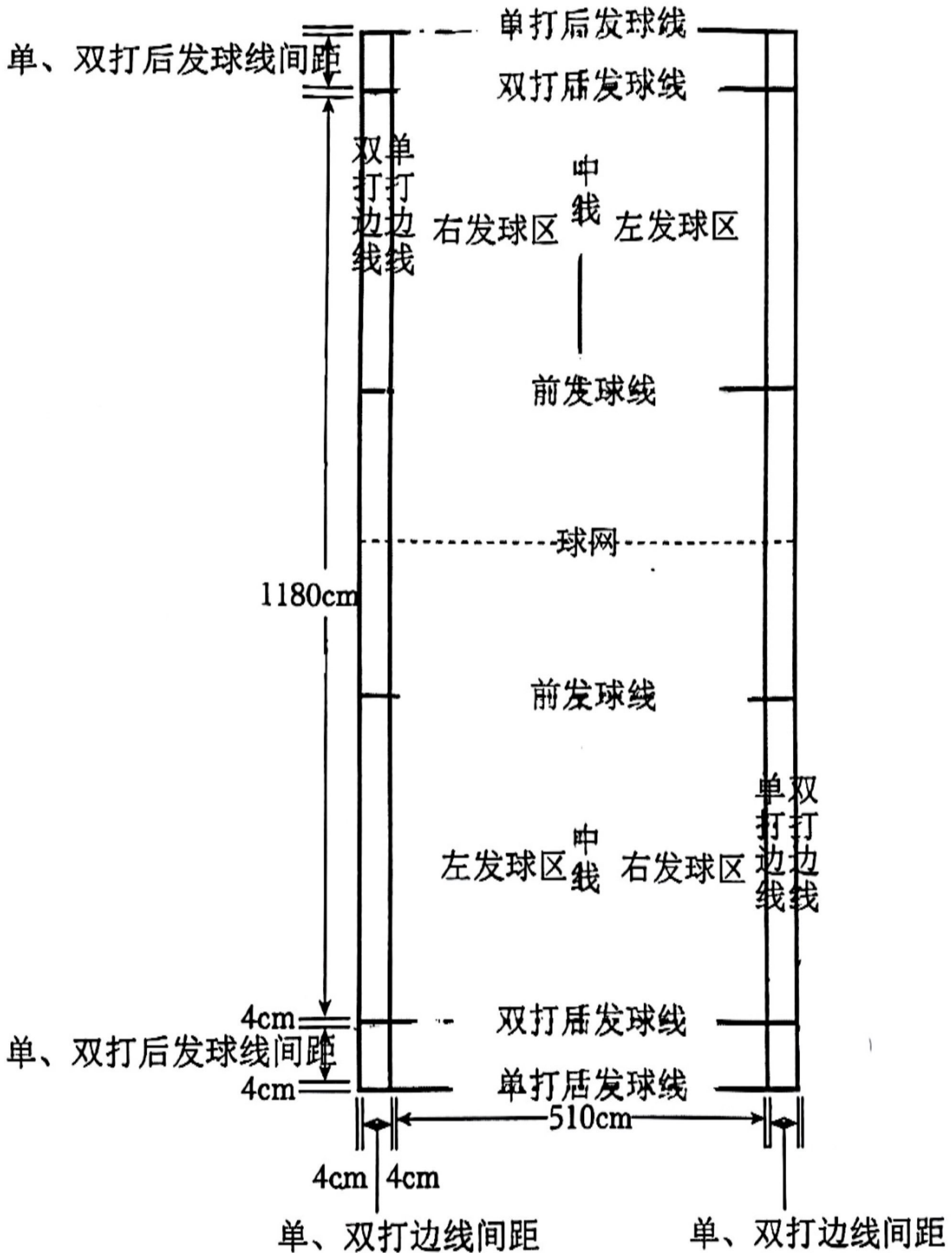
(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 连接 DE , 若 $AC=4$, $\angle BCD=120^\circ$, 求 DE 的值.





21. 羽毛球运动深受大众喜爱，该运动的场地是一块中间设有球网的矩形区域，它既可以进行单打比赛，也可以进行双打比赛。如图是羽毛球场地的平面示意图，已知场地上各条分界线宽均为4cm，场地的长比宽的2倍还多120cm（包含分界线宽），单、双打后发球线（球网同侧）间的距离与单、双打边线（中线同侧）间的距离之比是12:7。根据图中所给数据，求单、双打后发球线间的距离。



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $A(3, 5)$, $B(-2, 0)$ ，且与 y 轴交于点 C 。

(1) 求该函数的解析式及点 C 的坐标；

(2) 当 $x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=-3x+n$ 的值大于函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的值，直接写出 n 的取值范围。



23. 小宇观看奥运会跳水比赛，对运动员每一跳成绩的计算方法产生了浓厚的兴趣，查阅资料后，小宇了解到跳水比赛的计分规则为：

- 每次试跳的动作，按照其完成难度的不同，对应一个难度系数 H ；
- 每次试跳都有 7 名裁判进行打分（0-10 分，分数为 0.5 的整数倍），在 7 个得分中去掉 2 个最高分和两个最低分，剩下 3 个得分的平均值为这次试跳的完成分 p ；
- 运动员该次试跳的得分 $A = \text{难度系数 } H \times \text{完成分 } p \times 3$.

在比赛中，甲运动员最后一次试跳后的打分表为：

难度系数	裁判	1#	2#	3#	4#	5#	6#	7#
3.5	打分	7.5	8.5	4.0	9.0	8.0	8.5	7.0

(1) 甲运动员这次试跳的完成分 $P_{\text{甲}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，得分 $A_{\text{甲}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若按照全部 7 名裁判打分的平均分来计算完成分，得到的完成分为 $P_{\text{甲}'}$ ，

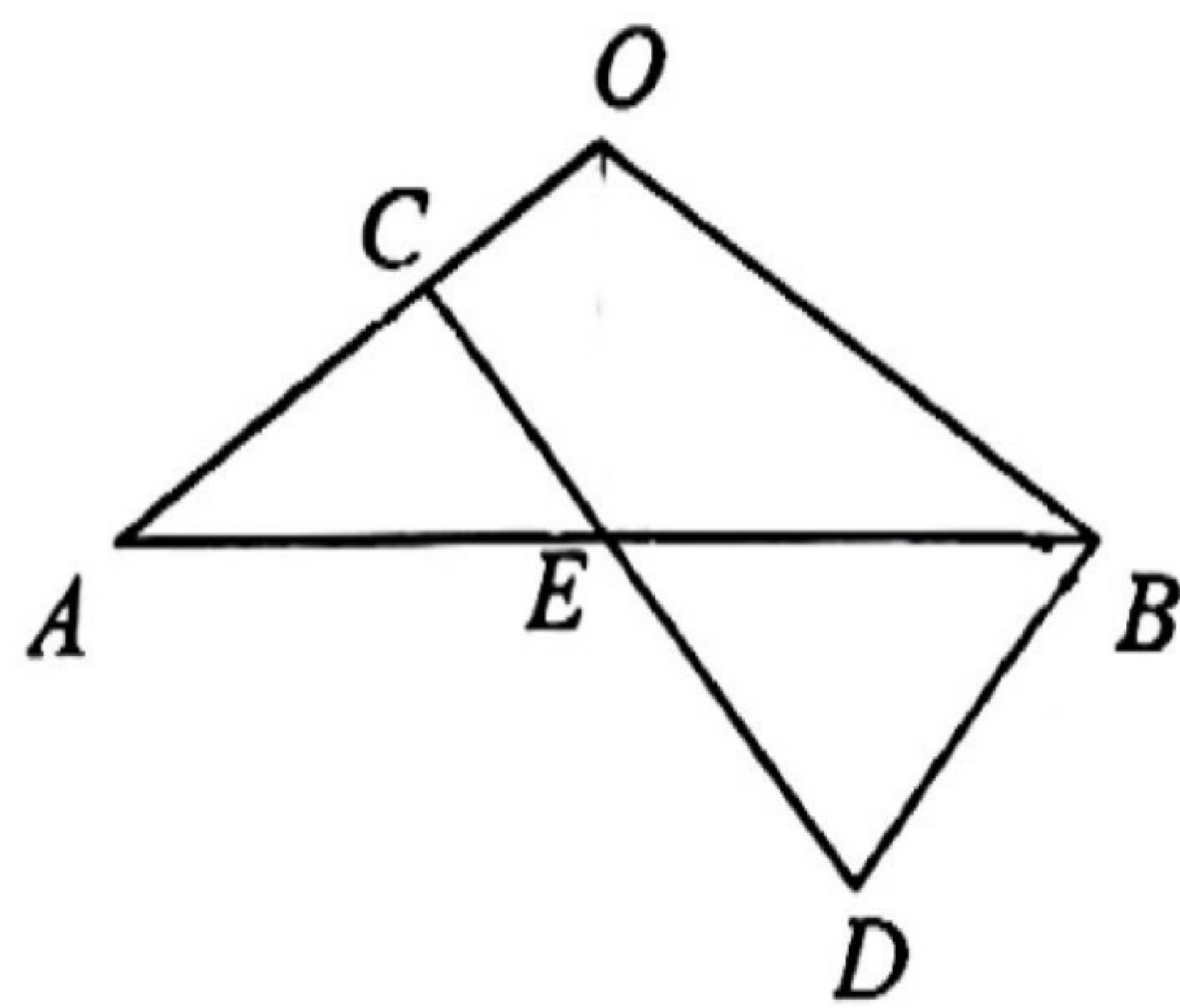
那么与 (1) 中所得的 $P_{\text{甲}}$ 比较， $P_{\text{甲}'}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $P_{\text{甲}}$ (填 “>”，“=” 或 “<”)；

(3) 在两人最后一次试跳之前，乙运动员的总分比甲运动员低 13.1 分，乙最后一次试跳的难度系数为 3.6，若乙想要在总分上反超甲，则这一跳乙的完成分 $P_{\text{乙}}$ 至少要达到 $\underline{\hspace{1cm}}$ 分。

24. 如图，在 $\triangle OAB$ 中， $OA=OB$ ， E 是 AB 的中点，过点 E 作 $EC \perp OA$ 于点 C ，过点 B 作 $BD \perp OB$ ，交 CE 的延长线于点 D 。

(1) 求证： $DB=DE$ ；

(2) 若 $AB=12$ ， $BD=5$ ，求 OA 的长。





25. 某款电热水壶有两种工作模式：煮沸模式和保温模式，在煮沸模式下将水加热至 100°C 后自动进入保温模式，此时电热水壶开始检测壶中水温，若水温高于 50°C 水壶不加热；若水温降至 50°C 水壶开始加热，水温达到 100°C 时停止加热…此后一直在保温模式下循环工作. 某数学小组对壶中水量 a (单位: L), 水温 T (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与时间 t (单位: 分) 进行了观测和记录, 以下为该小组记录的部分数据.

表1 从 20°C 开始加热至 100°C 水量与时间对照表

a	0.5	1	1.5	2	2.5	3
	4.5	8	11.5	15	18.5	22

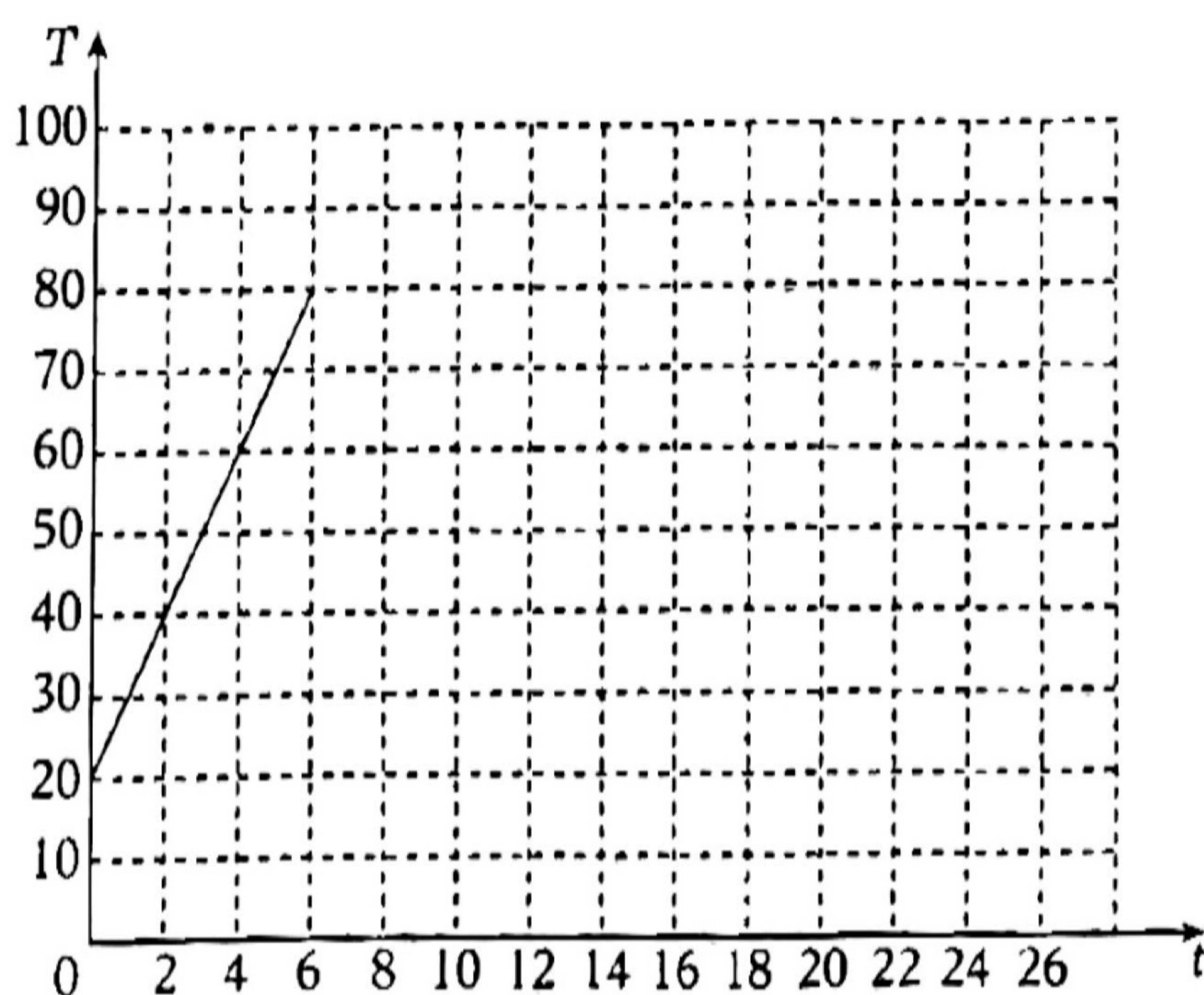
表2 1L 水从 20°C 开始加热, 水温与时间对照表

煮沸模式					保温模式									
t	0	3	6	m	10	12	14	16	18	20	22	24	26	...
T	20	50	80	100	89	80	72	66	60	55	50	55	60	...

对以上实验数据进行分析后, 该小组发现, 水壶中水量为 1L 时, 无论在煮沸模式还是在保温模式下, 只要水壶开始加热, 壶中水温 T 就是加热时间 t 的一次函数.

- (1) 写出表中 m 的值;
- (2) 根据表 2 中的数据, 补充完成以下内容:

①在图中补全水温与时间的函数图象:



②当 $t=60$ 时, $T=$ _____;

(3) 假设降温过程中, 壶中水温与时间的函数关系和水量多少无关. 某天小明距离出门仅有 30 分钟, 他往水壶中注入 2.5L 温度为 20°C 的水, 当水加热至 100°C 后立即关闭电源. 出门前, 他 _____ (填“能”或“不能”) 喝到低于 50°C 的水.



26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=x^2-(2+m)x+2m$ 的对称轴为直线 $x=t$.

(1) 求 t 的值 (用含 m 的代数式表示);

(2) 点 $A(-t, y_1)$, $B(t, y_2)$, $C(t+1, y_3)$ 在该抛物线上. 若抛物线与 x 轴的一个交点为 $(x_0, 0)$, 其中 $0 < x_0 < 2$, 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并说明理由.

27. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=\alpha$, 点 D 是 BC 中点, 点 E 是线段 BC 上一点, 以点 A 为中心, 将线段 AE 逆时针旋转 α 得到线段 AF , 连接 EF .

(1) 如图 1, 当点 E 与点 D 重合时, 线段 EF, AC 交于点 G , 求证: 点 G 是 EF 的中点;

(2) 如图 2, 当点 E 在线段 BD 上时 (不与点 B, D 重合), 若点 H 是 EF 的中点, 作射线 DH 交 AC 于点 M , 补全图形, 写出 $\angle AMD$ 的大小, 并证明.

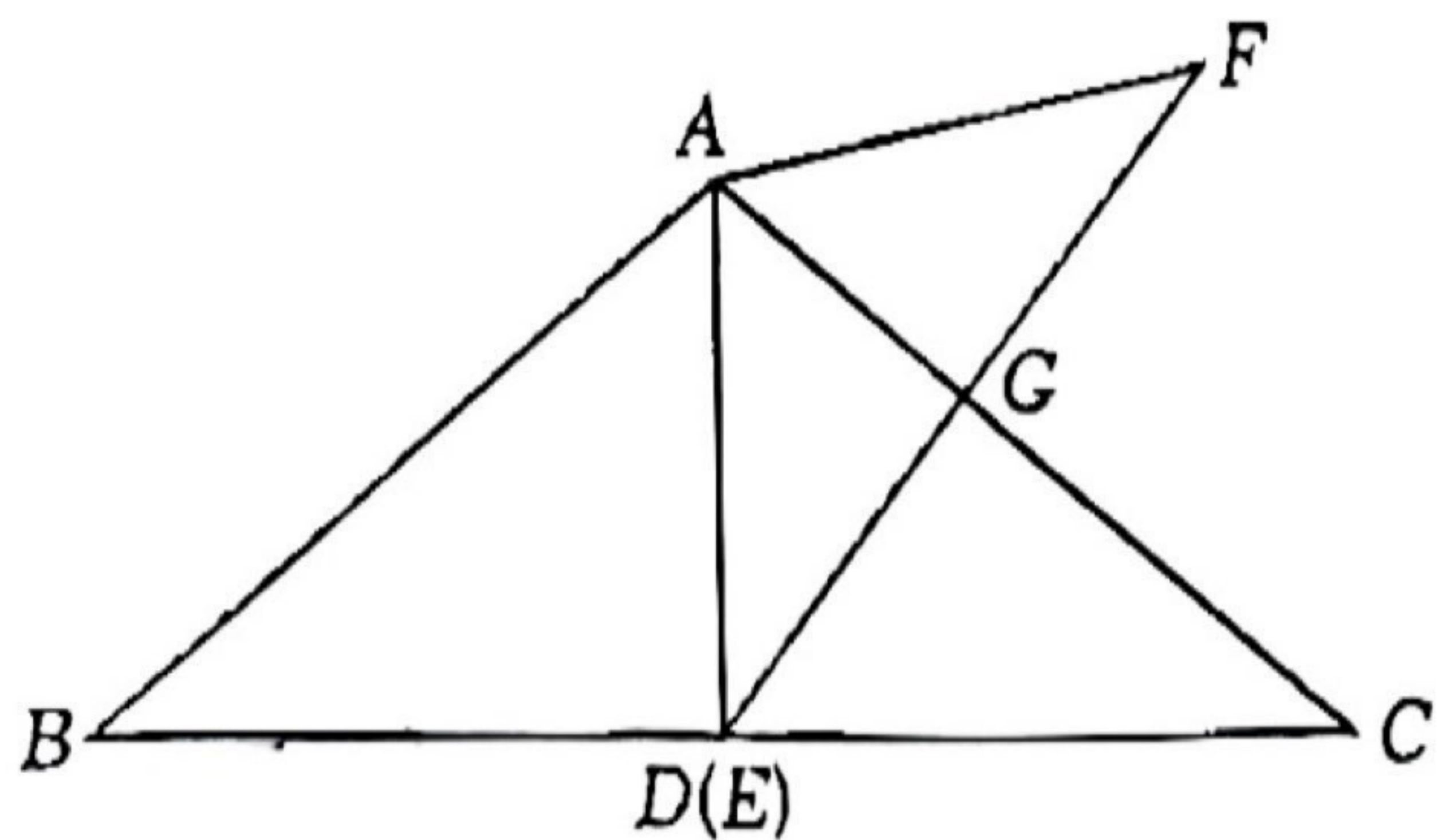


图 1

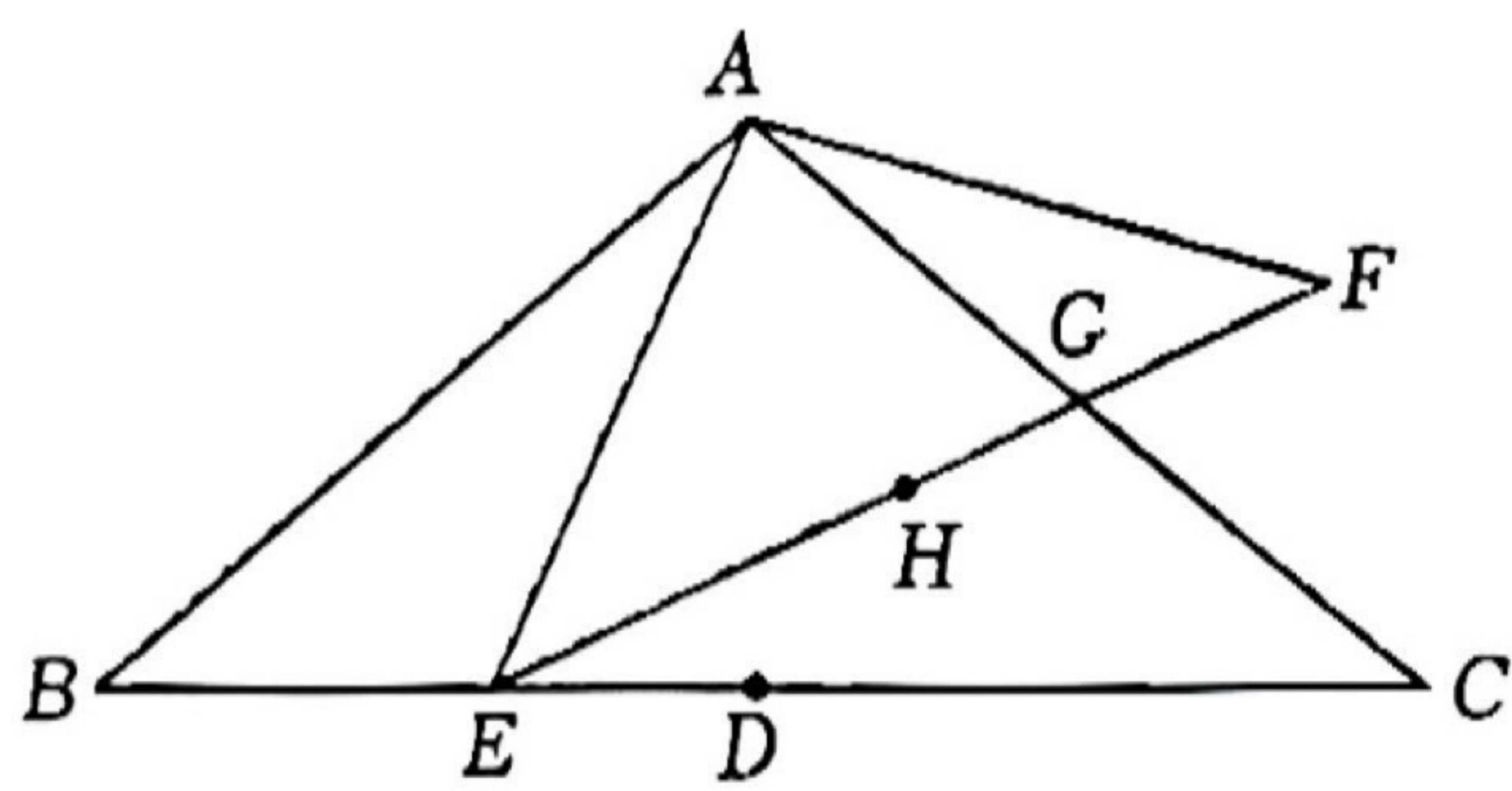


图 2



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于线段 a , 给出如下定义: 直线 $l_1: y=3x+b_1$ 经过线段 a 的一个端点, 直线 $l_2: y=-4x+b_2$ 经过线段 a 的另一个端点, 若直线 l_1 与 l_2 交于点 P , 且点 P 不在线段 a 上, 则称点 P 为线段 a 的“双线关联点”.

(1) 已知, 线段 a 的两个端点分别为 $(0, 2)$ 和 $(0, 5)$, 则在点 $P_1\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $P_2(1, 1)$, $P_3\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $P_4(-1, 2)$, 中, 线段 a 的“双线关联点”是 _____:

(2) $A(m, y_1)$, $B(m+3, y_2)$ 是直线 $y = \frac{2}{3}x$ 上的两个动点.

①点 P 是线段 AB 的“双线关联点”, 其纵坐标为 3, 直接写出点 P 的横坐标 _____:

②正方形 $CDEF$ 的四个顶点的坐标分别为 $C(t, t)$, $D(t, -t)$, $E(3t, -t)$, $F(3t, t)$, 其中 $t > 0$. 若所有线段 AB 的“双线关联点”中, 有且仅有两个点在正方形 $CDEF$ 的边上, 直接写出 t 的取值范围 _____.

