2024 北京北师大二附中高三（上）统练二

数　　学

一、选择题（共 10 小题）

1. 设全集$U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，集合$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{-3,0,2,3\}$，则$A\cap(\complement_U B)=$（　）

A. $\{-3,3\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-3,-2,-1,1,3\}$

2. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　）

A. $f(x)=-\ln x$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=3^{|x-1|}$

3. 已知 a，b，c 满足$c<b<a$，且$ac<0$，那么下列各式中不一定成立的是（　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

4. 下列各式化简运算结果为 1 的是（　）

A. $e^{\ln 3}-(0.125)^{-\frac{2}{3}}$　　B. $\lg\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\lg 5$

C. $\log_{\sqrt{a}}a^2$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）　　D. $\log_5 3\times\log_3 2\times\log_2 5$

5. 若$a=\log_3 0.8$，$b=3^{0.8}$，$c=0.3^{2.1}$，则a，b，c的大小关系为（　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6}{x}-\log_2 x$，在下列区间中，包含$f(x)$零点的区间是

A. $0,1$　　B. $1,2$　　C. $(2,4)$　　D. $(4,+\infty)$

7. 已知$a,b\in\mathrm{R}$，“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

8. 已知函数 $f(x)=3^x-2x-1$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集是（　）

A. $(0,1)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

9. 被誉为信息论之父的香农提出了一个著名的公式：$C=W\log_2(1+\dfrac{S}{N})$，其中$C$ 为最大数据传输速率，单位为$\mathrm{bis/s}$；W 为信道带宽，单位为 Hz；$\dfrac{S}{N}$ 为信噪比. 香农公式在 $5G$ 技术中发挥着举足轻重的作用.当

$\frac{S}{N}=99$，$W=2000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_1；当 $\frac{S}{N}=9999$，$W=3000\text{Hz}$ 时，最大数据传输速率记为 C_2，则 $\frac{C_2}{C_1}$ 为（　）

A. 1　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. 3

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足，$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_{4n-3}=-1$，$a_{4n-1}=1$，$a_{2n}=a_n$，该数列的前 n 项和为 S_n，则下列论断中错误的是（　）

A. $a_{31}=1$　　B. $a_{2024}=-1$

C. $\exists$ 非零常数 T，使得 $a_{n+T}=a_n$　　D. $\forall n\in \mathrm{N}^*$，都有 $S_{2^n}=-2$

二、填空题（共 5 小题）

11. 不等式 $\frac{2}{x-1}\le 3$ 的解集是__________.

12. $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{n+1}=2S_n+2$，则 $a_4=$__________.

13. 函数 $y=\begin{cases} x^4, & -1\le x\le 0 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x, & 0<x\le 2 \end{cases}$ 的值域为__________.

14. 甲乙两人射击，每人射击一次.已知甲命中的概率是 0.8，乙命中的概率是 0.7，两人每次射击是否命中互不影响.设事件 A 为“两人至少命中一次”，事件 B 为“甲命中”，则条件概率 $P(B|A)$ 的值为______.

15. 若存在实常数 k 和 b，使得函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 对其公共定义域上的任意实数 x 都满足：$F(x)\ge kx+b$ 和 $G(x)\le kx+b$ 恒成立，则称此直线 $y=kx+b$ 为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的“隔离直线”，已知函数 $f(x)=x^2(x\in R),g(x)=\frac{1}{x}(x<0),h(x)=2e\ln x$（$e$ 为自然对数的底数），有下列命题：

① $m(x)=f(x)-g(x)$ 在 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$ 内单调递增；

② $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在“隔离直线”，且 b 的最小值为 -4；

③ $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在“隔离直线”，且 k 的取值范围是 $[-4,1]$；

④ $f(x)$ 和 $h(x)$ 之间存在唯一的“隔离直线” $y=2\sqrt{e}x-e$.

其中真命题的序号为__________.（请填写正确命题的序号）

三、解答题（共 2 小题）

16. 某城市一条地铁新线开通了试运营，此次开通了 A、B、C、D、E、F 共 6 座车站．在试运营期间，地铁公司随机选取了乘坐该地铁新线的 200 名乘客，记录了他们的乘车情况，得到下表（单位：人）：

上车站 \ 下车站	A	B	C	D	E	F	合计
A	///	5	6	4	2	7	24
B	12	///	20	13	7	8	60
C	5	7	///	3	8	1	24
D	13	9	9	///	1	6	38
E	4	10	16	2	///	3	35
F	2	5	5	4	3	///	19
合计	36	36	56	26	21	25	200

（1）在试运营期间，从在 B 站上车的乘客中任选 1 人，估计该乘客在 C 站下车的概率；

（2）以频率估计概率，在试运营期间，从在 A 站上车的所有乘客和在 B 站上车的所有乘客中各随机选取 1 人，设其中在 C 站下车的人数为 X，求随机变量 X 的分布列以及数学期望；

（3）为了研究各站客流量的相关情况，用 ξ_1 示所有在 B 站上下车的乘客的上、下车情况，“$\xi_1=1$”表示上车，$\xi_1=0$”表示下车．相应地，用 ξ_2，ξ_3 分别表示在 C 站，D 站上、下车情况，直接写出方差 $D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$ 大小关系．

17. 设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in R$．

（Ⅰ）若 $a\le 0$，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $0<a<\dfrac{1}{e}$，

（i）证明 $f\left(x\right)$ 恰有两个零点

（ii）设 x_0 为 $f\left(x\right)$ 的极值点，x_1 为 $f\left(x\right)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，证明 $3x_0-x_1>2$．

参考答案

一、选择题（共 10 小题）

1.【答案】C

【分析】首先进行补集运算，然后进行交集运算即可求得集合的运算结果.

【详解】由题意结合补集的定义可知：$\complement_U B=\{-2,-1,1\}$，则$A\cap(\complement_U B)=\{-1,1\}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查补集运算，交集运算，属于基础题.

2.【答案】C

【分析】利用基本初等函数的单调性，结合复合函数的单调性判断 ABC，举反例排除 D 即可.

【详解】对于 A，因为$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=-x$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)=-\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 A 错误；

对于 B，因为$y=2^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 B 错误；

对于 C，因为$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，$y=-x$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)=-\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 C 正确；

对于 D，因为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1, f(2)=3^{|2-1|}=3$，

显然$f(x)=3^{|x-1|}$在$(0,+\infty)$上不单调，D 错误.

故选：C.

3.【答案】C

【分析】由已知可得$a>0$，$c<0$，再由不等式的基本性质逐一判断即可.

【详解】解：因为$c<b<a$，且$ac<0$，所以$a>0$，$c<0$，

对于 A，$a>0$，$b-c>0$，所以$ab-ac=a(b-c)>0$，所以$ab>ac$，故 A 正确；

对于B，$c(b-a)>0$，故B正确；

对于C，当$b=0$时，$cb^2=ab^2$，故C错误；

对于D，$ac<0$，$a-c>0$，所以$ac(a-c)<0$，故D正确.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据对数的性质进行计算即可.

【详解】对于 A，$e^{\ln 3}-(0.125)^{-\frac{2}{3}}=3-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-1$，故 A 错误；

对于 B，$\lg\sqrt{2}+\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{2}\lg 5=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$，故 B 错误；

对于 C，$\log_{\sqrt{a}} a^2=\log_{a^{\frac{1}{2}}} a^2=4\times 1=4$，故 C 错误；

对于 D，$\log_5 3\times\log_3 2\times\log_2 5=\frac{\lg 3}{\lg 5}?\frac{\lg 2}{\lg 3}\times\frac{\lg 5}{\lg 2}=1$，故 D 正确.

故选：D.

5.【答案】D

【分析】分别根据对数函数以及指数函数的单调性判断出 a,b,c 三数的取值范围，即可得答案.

【详解】由题意得 $a=\log_3 0.8<\log_3 1=0$，$b=3^{0.8}>3^0=1$，

$0<c=0.3^{2.1}<0.3^0=1$，

故 $a<c<b$，

故选：D

6.【答案】C

【详解】因为 $f(2)=3-1>0$，$f(4)=\frac{3}{2}-2<0$，所以由根的存在性定理可知：选 C.

考点：本小题主要考查函数的零点知识，正确理解零点定义及根的存在性定理是解答好本类题目的关键.

7.【答案】B

【分析】根据充分、必要性定义判断条件的推出关系，即可得答案.

【详解】由 $a^2=b^2$，则 $a=\pm b$，当 $a=-b\neq 0$ 时 $a^2+b^2=2ab$ 不成立，充分性不成立；

由 $a^2+b^2=2ab$，则 $(a-b)^2=0$，即 $a=b$，显然 $a^2=b^2$ 成立，必要性成立；

所以 $a^2=b^2$ 是 $a^2+b^2=2ab$ 的必要不充分条件.

故选：B

8.【答案】A

【分析】利用导数及导函数的单调性判断极小值点在 $0<x_0<1$，再由函数的单调性及 $f(0)=f(1)=0$ 可得不等式的解集.

【详解】因为 $f'(x)=3^x\ln 3-2$ 单调递增，且 $f'(0)=\ln 3-2<0$，$f'(1)=3\ln 3-2>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，

所以当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(0)=f(1)=0$，且 $0<x_0<1$，

所以由 $f(x)<0$ 可得 $0<x<1$，

故选：A

9.【答案】D

【分析】

根据定义，代入数据分别求 C_1 和 C_2，再根据换底公式计算 $\frac{C_2}{C_1}$ 的值.

【详解】由条件可知 $C_1=2000\log_2\left(1+99\right)=2000\log_2 100$，

$C_2=3000\log_2\left(1+9999\right)=3000\log_2 10000$，

$\frac{C_2}{C_1}=\frac{3000\log_2 10000}{2000\log_2 100}=\frac{3}{2}\times\log_{100}10000=3$.

故选：D

10.【答案】C

【分析】由已知 $a_{31}=a_{4\times8-1}=1$ 可得A正确；由已知递推关系化简 $a_{2024}=a_{2\times1012}=a_{1012}=a_{2\times506}=a_{506}=a_{2\times253}=a_{253}=a_{4\times64-3}=-1$ 可得 B 正确；由已知递推关系总结数列的规律，再用反证法得到 C 错误；由已知递推关系找到前 n 项和的规律再结合等比数列的前 n 项和可得 D 正确.

【详解】对于 A，因为 $a_{4n-1}=1$，所以 $a_{31}=a_{4\times8-1}=1$，故 A 正确；

对于 B，因为 $a_{4n-3}=-1$，$a_{2n}=a_n$，

所以 $a_{2024}=a_{2\times1012}=a_{1012}=a_{2\times506}=a_{506}=a_{2\times253}=a_{253}=a_{4\times64-3}=-1$，故 B 正确；

对于 C，由 $a_{4n-3}=-1$ 可得 $a_1=a_5=a_9=\cdots=-1$，

由 $a_{4n-1}=1$ 可得 $a_3=a_7=a_{11}=\cdots=1$，

由 $a_{2n}=a_n$ 可得 $a_1=a_2=a_4=a_8=a_{10}=\cdots=-1$，

而 $a_3=a_6=a_{12}=a_{24}=\cdots=1$，所以 $a_n\neq0$，

设存在非零常数 $T,\forall n\in\mathrm{N}^*$，使得 $a_{n+T}=a_n$，

则 $a_{T+T}=a_T=2a_T\Rightarrow a_T=0$，矛盾，

所以不存在非零常数 $T,\forall n\in\mathrm{N}^*$，使得 $a_{n+T}=a_n$，故 C 错误；

对于 D，当 $n=1$ 时，$S_{2^1}=S_2=a_1+a_2=-1+(-1)=-2$，

当 $n=2$ 时，$S_{2^2}=S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=-1-1+1-1=-2$，

即 $n=2$ 时，有相邻两项 a_3+a_4 的和为零，

即有接下来 $2^{2-1}=2$ 个项和为零；

当 $n=3$ 时，

$S_{2^3}=S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=-1-1+1-1-1+1+1-1=-2$，

即 $n=3$ 时，有相邻两项 a_3+a_4 的和与相邻四项 $a_5+a_6+a_7+a_8$ 为零，

即有接下来 $2^{2-1}+2^{3-1}=6$ 个项和为零；

…

总结发现规律为：当 $n=k$ 时，

即有接下来的 $2^{2-1}+2^{3-1}+\cdots+2^{k-1}=\dfrac{2\times(1-2^{k-1})}{1-2}=2(2^{k-1}-1)=2^k-2$ 项和为零，

所以 $S_{2^n}=a_1+a_2+\underbrace{a_3+\cdots+a_{2^n}}_{2^2-2个}=-2+0=-2$，故 D 正确.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题 D 选项关键在于能理解 $S_{2^n}=-2$ 的意义，即表示数列中前两项和 -2 为外的 3 到 4 项，5 到 8 项，9 到 16 项和分别为零.

二、填空题（共 5 小题）

11.【答案】$\{x\mid x<1或x\geq\dfrac{5}{3}\}$

【分析】分式不等式变式成 $\dfrac{-3x+5}{x-1}\leq 0$，等价于 $\begin{cases}(x-1)(3x-5)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，求解即可

【详解】$\dfrac{2}{x-1}-3=\dfrac{-3x+5}{x-1}\leq 0$，所以 $\begin{cases}(x-1)(3x-5)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $x<1$ 或 $x\geq\dfrac{5}{3}$，所以不等式 $\dfrac{2}{x-1}\leq 3$ 的解集是 $\{x\mid x<1或x\geq\dfrac{5}{3}\}$.

故答案为：$\{x\mid x<1或x\geq\dfrac{5}{3}\}$

12.【答案】54

【分析】由题意对所给的递推关系式进行赋值，得到关于首项、公比的方程组，求解方程组确定首项和公比的值，然后结合等比数列通项公式即可求得 a_4 的值.

【详解】设公比为 $q\left(q\neq 0\right)$，

由 $a_{n+1}=2S_n+2$，得 $a_2=2S_1+2=2a_1+2, a_3=2S_2+2=2\left(a_1+a_2\right)+2$，

即 $\begin{cases}a_1q=2a_1+2\\ a_1q^2=2\left(a_1+a_1q\right)+2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=2\\ q=3\end{cases}$，

所以 $a_4=a_1q^3=54$.

故答案为：54.

13.【答案】$\left[0,\frac{16}{9}\right]$

【分析】分 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 和 $0<x\le 2$ 两种情况，结合幂函数以及指数函数单调性求值域.

【详解】解：当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=x^4$ 单调递减，所以函数的值域为 $[0,1]$，

当 $0<x\le 2$ 时，$y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 单调递增，所以函数的值域为 $\left(1,\frac{16}{9}\right]$，

综上所述，函数 y 的值域为 $\left[0,\frac{16}{9}\right]$.

故答案为：$\left[0,\frac{16}{9}\right]$

14.【答案】$\frac{40}{47}$

【分析】根据对立事件的关系和独立性可求得 $P(A)$、$P(AB)$，再根据条件概率的计算公式即可求解.

【详解】$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.2\times 0.3=0.94$，

$P(AB)=0.8\times 0.7+0.8\times 0.3=0.8$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.8}{0.94}=\frac{40}{47}$.

故答案为：$\frac{40}{47}$.

15.【答案】①②④

【分析】由题意结合“隔离直线”的定义逐一考查所给的说法是否正确即可.

【详解】结合题意逐一考查所给命题的真假：

①∵$m(x)=f(x)-g(x)=x^2-\frac{1}{x}$，$x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$，则 $m'(x)=2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}>0$，

∴$F(x)=f(x)-g(x)$在 $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$ 内单调递增，故①对；

②、③设 $f(x)$、$g(x)$的隔离直线为 $y=kx+b$,则 $x^2\geqslant kx+b$ 对一切实数 x 成立,即有$\triangle_1\leqslant 0,k^2+4b\leqslant 0$，$b\leqslant 0$，

又 $\frac{1}{x}\leqslant kx+b$ 对一切 $x<0$ 成立,则 $kx^2+bx-1\leqslant 0$,即$\triangle_2\leqslant 0,b^2+4k\leqslant 0$，$k\leqslant 0$，

即有 $k^2\leqslant -4b$ 且 $b^2\leqslant -4k,k^4\leqslant 16b^2\leqslant -64k\Rightarrow -4\leqslant k\leqslant 0$，同理可得$-4\leqslant b\leqslant 0$，故②对，③错；

④函数 $f(x)$和 $h(x)$的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点 $\left(\sqrt{e},e\right)$，

因此若存在 $f(x)$和 $g(x)$的隔离直线，那么该直线过这个公共点，

设隔离直线的斜率为 k，则隔离直线方程为 $y-e=k(x-\sqrt{e})$,即 $y=kx-k\sqrt{e}+e$，

由 $f(x)\geqslant kx-k\sqrt{e}+e(x\in R)$,可得 $x^2-kx+k\sqrt{e}-e\geqslant 0$ 当 $x\in R$ 恒成立，

则△⩽0,即 $\left(k-2\sqrt{e}\right)^2\le 0$，故 $k=2\sqrt{e}$,此时直线方程为： $y=2\sqrt{e}x-e$，

下面证明 $h\left(x\right)\le 2\sqrt{e}x-e$：

令 $G\left(x\right)=2\sqrt{e}x-e-h\left(x\right)=2\sqrt{e}x-e-2e\ln x$，则 $G'\left(x\right)=\dfrac{2\sqrt{e}\left(x-\sqrt{e}\right)}{x}$，

当 $x=\sqrt{e}$ 时,$G'(x)=0$,当 $0<x<\sqrt{e}$ 时,$G'(x)<0$,当 $x>\sqrt{e}$ 时,$G'(x)>0$,

则当 $x=\sqrt{e}$ 时,$G(x)$取到极小值，极小值是 0，也是最小值.

所以 $G\left(x\right)=2\sqrt{e}x-e-h\left(x\right)\ge 0$,则 $h\left(x\right)\le 2\sqrt{e}x-e$ 当 $x>0$ 时恒成立.

∴函数 $f(x)$和 $g(x)$存在唯一的隔离直线 $y=2\sqrt{e}x-e$，故④正确.

故答案为①②④.

【点睛】“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解.但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好三基，以不变应万变才是制胜法宝.

三、解答题（共 2 小题）

16.【答案】(1) $\dfrac{1}{3}$

(2) 分布列见解析；期望为 $\dfrac{7}{12}$

(3) $D(\xi_2)<D(\xi_1)<D(\xi_3)$

【分析】(1) 利用频率来求概率即可；

(2) 由题意可知，X 可取 0，1，2，求出相应的概率，从而可求出随机变量 X 的分布列及数学期望；

(3) 利用两点分布的方差公式依次求出进行比较即可.

【小问 1 详解】

设选取的乘客在 B 站上车、在 C 站下车为事件 M，

由已知，在 B 站上车的乘客有 60 人，其中在 C 站下车的乘客有 20 人，

所以 $P(M)=\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$.

【小问 2 详解】

从在 A 站上车的所有乘客中任选 1 人，该乘客在 C 站下车的概率为 $\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

由题意可知，X 可取 0，1，2

$P(X=0)=(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$，

$P(X=1)=\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$，

$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

所以随机变量 X 的数学期望为

$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$.

【小问 3 详解】

因为在 B 站上车的有 60 人，下车的有 36 人，

所以 $P(\xi_1=1)=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$，$P(\xi_1=0)=\frac{36}{96}=\frac{3}{8}$，

所以 $D(\xi_1)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{64}\approx 0.2344$，

因为在 C 站上车的有 24 人，下车的有 56 人，

所以 $P(\xi_2=1)=\frac{24}{80}=\frac{3}{10}$，$P(\xi_2=0)=\frac{56}{80}=\frac{7}{10}$，

所以 $D(\xi_2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}=0.21$，

因为在 D 站上车的有 38 人，下车的有 26 人，

所以 $P(\xi_3=1)=\frac{38}{64}=\frac{19}{32}$，$P(\xi_3=0)=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}$，

所以 $D(\xi_3)=\frac{19}{32}\times\frac{13}{32}=\frac{247}{1024}\approx 0.2412$，

所以 $D(\xi_2)<D(\xi_1)<D(\xi_3)$.

17.【答案】(I) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.;

(II)(i) 见解析;(ii) 见解析.

【分析】(I);首先写出函数的定义域，对函数求导，判断导数在对应区间上的符号，从而得到结果;

(II)(i) 对函数求导，确定函数的单调性，求得极值的符号，从而确定出函数的零点个数，得到结果;

(ii) 首先根据题意，列出方程组，借助于中介函数，证得结果.

【详解】(I) 解：由已知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

因此当 $a\le 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

（II）证明：（i）由（I）知，$f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又 $g(1)=1-ae>0$，且 $g(\ln\frac{1}{a})=1-a(\ln\frac{1}{a})^2\frac{1}{a}=1-(\ln\frac{1}{a})^2<0$，

故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，

从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0，

则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{(x_0,+\infty)}$ 内单调递减，

因此 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$，

从而 $f(\ln\frac{1}{a})=\ln\ln\frac{1}{a}-a(\ln\frac{1}{aa}-1)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=h(\ln\frac{1}{a})<0$，

又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{(x_0,+\infty)}$ 内有唯一零点，

又 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1，从而，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

（ii）由题意，$\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_1)=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a{x_0}^2e^{x_0}=1 \\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1} \end{cases}$，

从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{{x_0}^2}e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{{x_0}^2\ln x_1}{x_1-1}$，

因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{{x_0}^2(x_1-1)}{x_1-1}={x_0}^2$，

两边取对数，得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln {x_0}^2$，

于是 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$，

【点睛】本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法，考查函数思想、化归与转化思想，考查综合分析问题和解决问题的能力.