# 2023北京牛栏山一中高二（上）期中

# 数　　学

**2023.11**

**第I卷**

**一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分，四个选项中只有一个符合题目）**

1. 若直线 $x+y-3=0$ 与 $2x+ay-1=0$ 垂直，则 $a=$（　）

A. $-2$　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 椭圆的两个焦点是 $(-4,0)$ 和 $(4,0)$，椭圆上的点 $M$ 到两个焦点的距离之和等于10，则椭圆的标准方程是（　）

A. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$

C. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

3. 若 $x^2+y^2+4x-2y-m=0$ 表示圆的方程，则 $m$ 的取值范围是（　）

A. $(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,5)$　　C. $(-\infty,-5)$　　D. $(-5,+\infty)$

4. 若双曲线 $C$：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的焦距长为8，则该双曲线的渐近线方程为（　）

A. $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}x$　　B. $y=\pm\dfrac{5}{4}x$

C. $y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$

5. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上横坐标为3的点 $M$ 到焦点 $F$ 的距离为6，则 $p=$（　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 8

6. 已知平面 $\alpha$ 的法向量为 $\vec{n}=(2,1,1)$，若平面 $\alpha$ 外的直线 $l$ 的方向向量为 $\vec{a}=(-1,0,3)$，则可以推断（　）

A. $l//\alpha$　　B. $l\perp\alpha$

C. $l$ 与 $\alpha$ 斜交　　D. $l\subset\alpha$

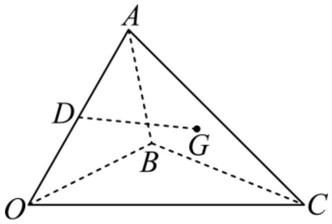
7. 已知点 $M$ 的坐标为 $(a,b)$，圆 $M$ 与 $x$ 轴交于 $A$、$B$ 两点，与 $y$ 轴交于 $C$、$D$ 两点，则“$|AB|=|CD|$”是“$a=b$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 充分必要条件

8. 已知三棱锥 $O-ABC$，点 $D$ 是 $OA$ 的中点，点 $G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心（三角形三条中线的交点叫三角形的

重心）设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则向量$\overrightarrow{DG}$用基底$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$可表示为（　）



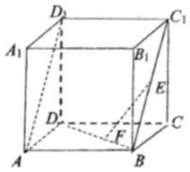

A. $-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　B. $-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

C. $\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$　　D. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

9. 设点$P$为函数$y=\sqrt{3}|x|$图象上的动点，$Q$是圆$C$：$(x-a)^2+(y-b)^2=3$（其中$ab=0$）上的动点，若$|PQ|$的最小值为$\sqrt{3}$，则以所有满足条件的点$C$为顶点的多边形的面积为（　）

A. $24\sqrt{3}$　　B. $16\sqrt{3}$　　C. $8\sqrt{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点$E$是线段$BC_1$的中点，点$F$是线段$BD$上的动点，下列结论中错误的是（　）




A. 对于任意的点$F$，均有$EF\perp A_1C$

B. 存在点$F$，使得$EF\parallel$平面$AA_1B_1B$

C. 存在点$F$，使得$EF$与$CC_1$所成角是$60^\circ$

D. 不存在点$F$，使得$EF$与平面$ABC_1D_1$的所成角是$30^\circ$

## 第II卷

**二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分．请把结果填在答题纸上的相应位置.）**

11. 直线$y=1$的倾斜角为______.

12. 平面直角坐标系中，已知直线$l$过点$(0,4)$，与两坐标轴围成的三角形的面积为 4，则直线$l$的方程为________.

13. 已知抛物线$C$：$y^2=8x$的焦点为$F$，准线为$l$，则$F$到$l$的距离是_________；若斜率为$\sqrt{3}$的直线经过焦点$F$在第一象限与抛物线交于点$M$，过$M$作$MN$垂直于$l$于点$N$，则$\triangle MNF$的面积为__________.

14. 已知椭圆$C$：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$与双曲线$E$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有共同的焦点$F_1$，$F_2$，设两曲线的其中一个交点

为 $P$，且 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{8}$，则双曲线的离心率为________.

15. 关于曲线 $W_1$： $x^2+y^2=m^2$， $W_2$： $x^4+y^2=m^2\left(m>0\right)$

①曲线 $W_2$ 关于 $x$ 轴、$y$ 轴和原点对称；

②当 $m=1$ 时，两曲线共有四个交点；

③当 $0<m<1$ 时，曲线 $W_1$ 围成的区域面积大于曲线 $W_2$ 所围成的区域面积；

④当 $m=\sqrt{2}$ 时，曲线 $W_2$ 对围成的平面区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是 3.

上述结论中所有正确命题的序号是___________.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤.**

16. 平面直角坐标系中，已知圆 $C$ 的圆心是 $C\left(0,1\right)$，且经过点 $M\left(\sqrt{3},0\right)$，直线 $l$ 的方程为 $x+y+m=0$.

（1）求圆 $C$ 的标准方程；

（2）若 $l$ 与圆 $C$ 相切，求 $m$ 的值；

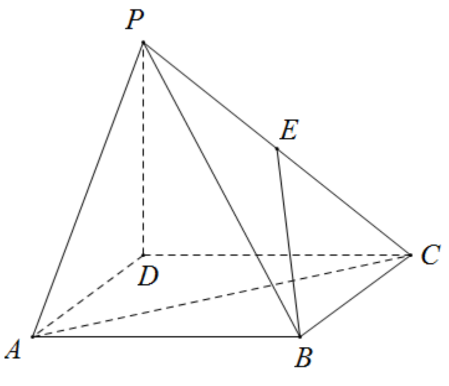
（3）若直线 $l$ 被圆截得的弦长 $\left|MN\right|=2\sqrt{3}$，求 $m$ 的值.

17. 已知抛物线的顶点在原点，对称轴是 $x$ 轴，且经过点 $P\left(1,2\right)$.

（1）求抛物线的标准方程、焦点坐标；

（2）经过焦点 $F$ 且斜率是 1 的直线 $l$，与抛物线交于 $A$、$B$ 两点，求 $\left|AB\right|$ 以及 $\triangle OAB$ 的面积.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PD=2$，点 $E$ 是 $PC$ 的中点.

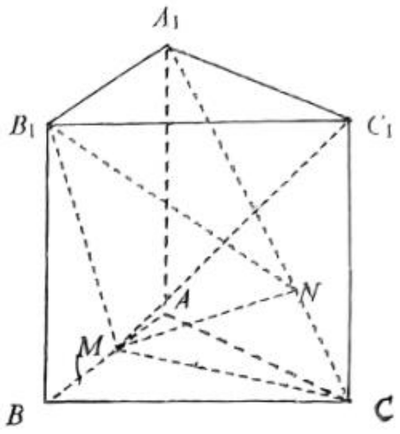



（1）求证： $BC\parallel$ 平面 $PAD$；

（2）求直线 $AC$ 与 $EB$ 所成角的余弦值；

（3）求直线 $EB$ 与平面 $PAD$ 所成角的正弦值.

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=\sqrt{5}$， $AB=2$， $AA_1=3$， $M$ 为棱 $AB$ 的中点，点 $N$ 是 $A_1C$ 上靠近 $C$ 的三等分点




（1）求证：$AB\perp$平面$MCC_1$；

（2）求二面角$N-B_1M-A$的余弦值；

（3）棱$AC$上是否存在点$P$，使得点$P$在平面$B_1MN$内？若存在，求$\dfrac{AP}{AC}$的值；若不存在，说明理由．

20. 已知椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的长轴长为$2\sqrt{2}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点且与$x$轴不垂直的直线$l$与椭圆相交于$A$，$B$两点，点$M$的坐标为$\left(2,1\right)$，记直线$MA$，$MB$的斜率分别为$k_1$，$k_2$．

（1）求椭圆$C$的方程；

（2）当$\left|AB\right|=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$时，求直线$l$的方程；

（3）求证：$k_1+k_2$为定值．

21. 对于空间向量$\overrightarrow{m}=\left(a,b,c\right)$，定义$\left\|\overrightarrow{m}\right\|=\max\left\{\left|a\right|,\left|b\right|,\left|c\right|\right\}$，其中$\max\left\{x,y,z\right\}$表示$x$，$y$，$z$这三个数的最大值．

（1）已知$\vec{a}=\left(3,-4,2\right)$，$\vec{b}=\left(x,-x,2x\right)$．

①直接写出$\left\|\vec{a}\right\|$和$\left\|\vec{b}\right\|$（用含$x$的式子表示）；

②当$0\le x\le 4$，写出$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|$的最小值及此时$x$的值；

（2）设$\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，求证：$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|\le\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$；

（3）在空间直角坐标系$O-xyz$中，$A\left(2,0,0\right)$，$B\left(0,2,0\right)$，$C\left(0,0,2\right)$，点$Q$是$\triangle ABC$内部的动点，直接写出$\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|$的最小值（无需解答过程）．

# 参考答案

## 第I卷

### 一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分，四个选项中只有一个符合题目）

1.【答案】A

【分析】根据直线垂直的充要条件得解.

【详解】因为直线$x+y-3=0$与$2x+ay-1=0$垂直，

所以$1\times 2+a=0$，解得$a=-2$，

故选：A

2.【答案】C

【分析】根据椭圆定义可得$a$，根据焦点坐标可得$c$，然后由$b^2=a^2-c^2$求出$b^2$即可得方程.

【详解】由椭圆定义可知，$2a=10$，得$a=5$，

又椭圆的两个焦点是$\left(-4,0\right)$和$\left(4,0\right)$，

所以椭圆焦点在$x$轴上，且$c=4$，所以$b^2=a^2-c^2=25-16=9$，

所以，所求椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

故选：C

3.【答案】D

【分析】根据圆的一般式满足的条件即可列不等式求解.

【详解】因为方程$x^2+y^2+4x-2y-m=0$表示一个圆，所以$4^2+\left(-2\right)^2+4m>0$，

解得$m>-5$，

所以$m$的取值范围是$\left(-5,+\infty\right)$.

故选：D

4.【答案】D

【分析】利用双曲线的性质计算即可.

【详解】由题意可知$9+m=\left(\dfrac{8}{2}\right)^2\Rightarrow m=7$，即$C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$，

令$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=0\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$.

故选：D

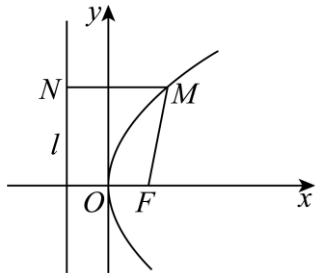
5.【答案】C

【分析】根据抛物线定义，将到焦点距离转化为到准线距离，然后结合图形可得.

【详解】记抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的准线为$l$，作$MN\perp l$，垂足为$N$，

由抛物线定义可知，$|MN|=|MF|$，则$3+\frac{p}{2}=6$，解得$p=6$.

故选：C




6.【答案】C

【分析】探讨两个给定向量的关系，再借助空间位置关系的向量表示判断即可.

【详解】由$\vec{n}=(2,1,1)$与$\vec{a}=(-1,0,3)$，得$\vec{n}\cdot\vec{a}=1\neq 0$，即向量$\vec{n}$与$\vec{a}$不垂直，

因此$\vec{a}$不平行于平面$\alpha$，即直线$l\not\subset\alpha$，直线$l$与平面$\alpha$也不平行，直线$l$与平面$\alpha$相交，AD错误；

显然向量$\vec{n}$与$\vec{a}$不共线，即直线$l$与平面$\alpha$不垂直，$l$与$\alpha$斜交，B错误，C正确.

故选：C

7.【答案】B

【分析】根据$|AB|=|CD|$结合勾股定理可得出$|a|=|b|$，结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设圆$M$的半径为$r$，则圆心$M$到$x$轴、$y$轴的距离分别为$|b|$、$|a|$，

若$|AB|=|CD|$，则$2\sqrt{r^2-b^2}=2\sqrt{r^2-a^2}$，可得$|a|=|b|$，则$a=\pm b$.

因为“$a=\pm b$”$\not\Rightarrow$“$a=b$”，且“$a=\pm b$”$\Leftarrow$“$a=b$”，

因此，“$|AB|=|CD|$”是“$a=b$”的必要不充分条件.

故选：B.

8.【答案】B

【分析】记$BC$的中点为$E$，连接$AE$，然后根据重心性质和空间向量的线性运算可得.

【详解】记$BC$的中点为$E$，连接$AE$，则$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

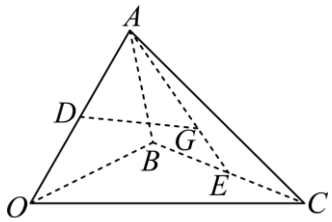
又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$，

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}\right)=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$，

由重心性质可知$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$，所以$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$，

所以$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

故选：B



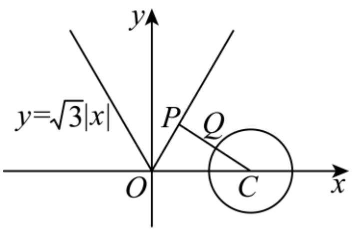

9.【答案】A

【分析】分别考察圆心在原点，在$x$轴上和在$y$轴上，结合图形分析，利用圆心到直线距离求出圆心坐标，然后可得面积.

【详解】当$a=0,b=0$时，显然不满足题意；

当$a>0,b=0$时，由图可知，$|PQ|$的最小值为圆心到直线$y=\sqrt{3}x$的距离减去半径，

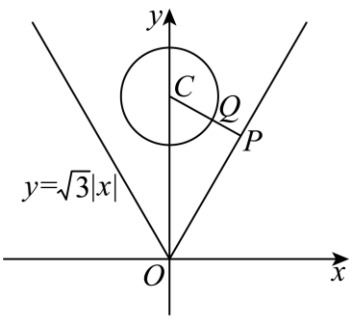
所以，$\dfrac{\left|\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{3+1}}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，解得$a=4$，此时圆心为$\left(4,0\right)$；



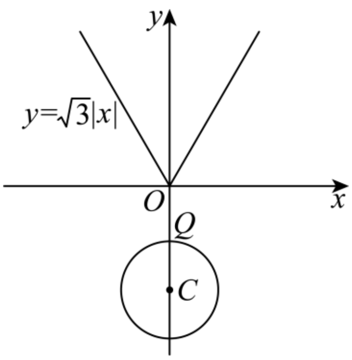

当$a<0,b=0$时，由对称性可知，此时圆心为$\left(-4,0\right)$；

当$a=0,b>0$时，由图可知，$|PQ|$的最小值为圆心到直线$y=\sqrt{3}x$的距离减去半径，

所以，$\dfrac{|-b|}{\sqrt{3+1}}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，解得$b=4\sqrt{3}$，此时圆心为$\left(0,4\sqrt{3}\right)$；



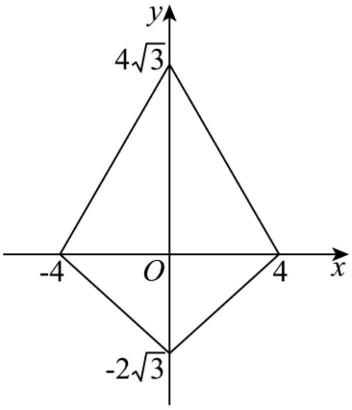

当$a=0,b<0$时，由图可知，$|PQ|$的最小值等于$|OC|$减去半径，易知，此时圆心为$\left(0,-2\sqrt{3}\right)$.



连接四点得如图所示四边形，

则四边形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

故选：A

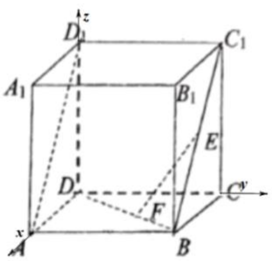



10.【答案】D

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量研究空间中线线、线面关系即可.

【详解】设正方体棱长为 $2$，如图所示建立空间直角坐标系，

则 $A(2,0,0)A_1(2,0,2),C(0,2,0),E(1,2,1),B(2,2,0),D_1(0,0,2),C_1(0,2,2)$,




设 $\overrightarrow{DF}=\lambda\overrightarrow{DB}=(2\lambda,2\lambda,0)\left(\lambda\in[0,1]\right)$,

则 $\overrightarrow{DE}=(1,2,1)\Rightarrow\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=(2\lambda-1,2\lambda-2,-1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-2)$,

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-2(2\lambda-1)+2(2\lambda-2)+2=0\Rightarrow EF\perp A_1C$，故 A 正确；

易知平面 $AA_1B_1B$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$,

则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA}=2(2\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$，即点 $F$ 是线段 $BD$ 的中点时，

满足 $EF\parallel$ 平面 $AA_1B_1B$，故 B 正确；

由上可知 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$,

所以当 $\cos\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CC_1}=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CC_1}\right|}=\frac{-2}{2\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda-2)^2+1}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$,

即 $\lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ 时，使得 $EF$ 与 $CC_1$ 所成角是 $60^\circ$，故 C 正确；

由上可知 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，设平面 $ABC_1D_1$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}2y=0\\-2x+2z=0\end{cases}$，令 $x=1\Rightarrow y=0,z=1$，即 $\vec{n}=(1,0,1)$，

若 $EF$ 与平面 $ABC_1D_1$ 的所成角是 $30^\circ$，

则有 $\sin 30^\circ=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{|2\lambda-2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda-2)^2+1}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{2}$，

即存在点 $F$，使得 $EF$ 与平面 $ABC_1D_1$ 的所成角是 $30^\circ$，故 D 错误.

故选：D

## 第II卷

## 二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11.【答案】0

【分析】根据直线与坐标轴平行可得倾斜角.

【详解】因为直线 $y=1$ 与 $x$ 轴平行，所以直线 $y=1$ 的倾斜角为 $0$.

故答案为：0

12.【答案】$y=\pm 2x+4$

【分析】根据题意假设直线 $l$ 的截距式方程，从而得到关于 $a,b$ 的方程组，解之即可得解.

【详解】依题意，直线 $l$ 的两个截距都不为 0，故设直线 $l$ 为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

则 $\begin{cases}\dfrac{0}{a}+\dfrac{4}{b}=1\\\dfrac{1}{2}|a||b|=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\pm 2\\b=4\end{cases}$，

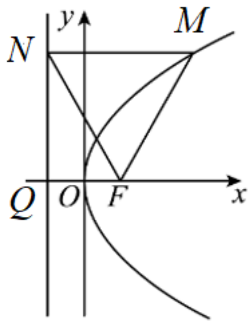
所以直线 $l$ 为 $\dfrac{x}{\pm 2}+\dfrac{y}{4}=1$，即 $y=\pm 2x+4$.

故答案为：$y=\pm 2x+4$.

13.【答案】 ①. 4 ②. $16\sqrt{3}$

【分析】根据所给条件及抛物线的定义求出 $|FQ|=p$，再由直线倾斜角可得三角形为等边三角形，即可得解.

【详解】如图，




由抛物线的方程可知，$|FQ| = p = 4$，

因为直线 $FM$ 的斜率 $k = \sqrt{3}$，所以 $\angle MFx = 60^\circ$，

又 $MN // x$ 轴，所以 $\angle NMF = 60^\circ$，

由抛物线的定义知，$|MF| = |MN|$，所以 $\triangle MNF$ 为正三角形，

在 $\mathrm{Rt}\triangle NFQ$ 中，$\angle NFQ = 60^\circ$，$|FQ| = 4$，所以 $|NF| = 2|QF| = 8$，

所以 $S_{\triangle MNF} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}|NF|^2 = 16\sqrt{3}$，

故答案为：4；$16\sqrt{3}$

14. 【答案】$\dfrac{4}{3}$

【分析】根据椭圆和双曲线定义，结合余弦定理即可求得 $a$，然后可得离心率.

【详解】由题知，椭圆长半轴长为 5，短半轴长为 3，所以 $c = 4$，

不妨设交点 $P$ 在第一象限，记 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$，

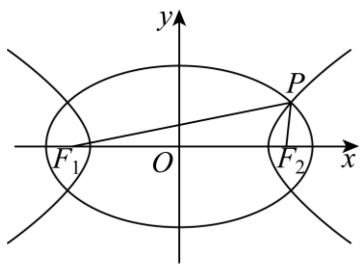
由椭圆和双曲线定义知，$\begin{cases} m + n = 10 \\ m - n = 2a \end{cases}$，解得 $m = 5 + a, n = 5 - a$，

又因为 $\cos\angle F_1PF_2 = \dfrac{1}{8}$，

所以，由余弦定理可得 $(5+a)^2 + (5-a)^2 - 2(5+a)(5-a) \times \dfrac{1}{8} = 64$，解得 $a = 3$，

所以 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$



15.【答案】①②④

【分析】①将点$(x,-y)$、$(-x,y)$、$(-x,-y)$判断方程是否仍为$x^4+y^2=m^2$即可；②联立曲线方程求得$x=0$或$x=\pm1$，进而求交点个数；③④由曲线$W_1$是圆心为原点，半径为$m$的圆，利用二次函数性质求曲线$W_2$上任意一点$(x,y)$到原点距离$d$的范围，结合对称性即可判断.

【详解】①由点$(x,y)$在$W_2: x^4+y^2=m^2\left(m>0\right)$上，

对于点$(x,-y)$，代入方程$x^4+(-y)^2=x^4+y^2=m^2$，也在$W_2$上；

对于点$(-x,y)$，代入方程$(-x)^4+y^2=x^4+y^2=m^2$，也在$W_2$上；

对于点$(-x,-y)$，代入方程$(-x)^4+(-y)^2=x^4+y^2=m^2$，也在$W_2$上；

所以曲线$W_2$关于$x$轴、$y$轴和原点对称，对；

②当$m=1$时，$W_1: x^2+y^2=1$，$W_2: x^4+y^2=1$，

联立可得$x^4+1-x^2=1$，即$x^2(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$或$x=\pm1$，

当$x=0$时，都有$y=\pm1$，即存在交点$(0,-1),(0,1)$；

当$x=\pm1$时，都有$y=0$，即存在交点$(-1,0),(1,0)$；

综上，共有四个交点，对；

③当$0<m<1$时，对于曲线$W_1$是圆心为原点，半径为$m$的圆，

对于曲线$W_2$，有$y^2=m^2-x^4\ge0$，即$0\le x^2\le m$，

所以曲线$W_2$上任意一点$(x,y)$到原点距离$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}+m^2}$，

由$0<m<1$，结合二次函数的性质知$x^2=0$时$d_{\min}=m$，即$d\ge m$恒成立，

所以曲线$W_2$面积更大，错；

④当$m=\sqrt{2}$时，则$W_2: x^4+y^2=2$，故$y^2=2-x^4\ge0$，可得$-\sqrt{2}\le x^2\le\sqrt{2}$，

曲线$W_2$上任意一点$(x,y)$到原点距离$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}$，当$x^2=\frac{1}{2}$时$d_{\max}=\frac{3}{2}$，

结合对称性知：曲线$W_2$对围成的平面区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是3，对.

故选：①②④

【点睛】关键点点睛：对于③④，在利用二次函数性质求曲线$W_2$上任意一点$(x,y)$到原点距离$d=\sqrt{x^2+y^2}$的最值或范围为关键.

**三、解答题（本大题共6小题，共85分，解答应写出文字说明过程或演算步骤.**

16.【答案】（1）$x^2+\left(y-1\right)^2=4$；

（2）$m=2\sqrt{2}-1$或$-2\sqrt{2}-1$；

（2）$m=-1+\sqrt{2}$ 或 $-1-\sqrt{2}$.

【分析】（1）根据两点间距离公式求出半径，然后可得标准方程；

（2）根据圆心到直线距离等于半径即可求解；

（3）利用弦长公式求出圆心到直线的距离，然后由点到直线的距离公式求解可得.

【小问 1 详解】

由题意知，$r=|CM|=\sqrt{\left(0-\sqrt{3}\right)^2+(1-0)^2}=2$，

所以圆 $C$ 的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$.

【小问 2 详解】

若 $l$ 与圆 $C$ 相切，

则圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{|0+1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{2}}=2$，

解得 $m=2\sqrt{2}-1$ 或 $-2\sqrt{2}-1$

【小问 3 详解】

设圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离为 $d'$，则有 $(d')^2+\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2=4$

因为 $|MN|=2\sqrt{3}$，所以 $d'=1$，

由点到直线的距离公式得 $d'=\dfrac{|0+1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $m=-1+\sqrt{2}$ 或 $-1-\sqrt{2}$.

17.【答案】（1）标准方程为 $y^2=4x$，焦点坐标为 $(1,0)$

（2）$|AB|=8$；$2\sqrt{2}$

【分析】（1）设抛物线方程，将点 $P$ 坐标代入计算求解方程，进一步求出焦点坐标；

（2）根据点斜式求出直线 $l$ 方程，联立直线与抛物线，韦达定理，利用弦长公式或者焦半径公式求弦长，利用点到直线距离公式求高，进而求解三角形的面积.

【小问 1 详解】

由题设方程为 $y^2=2px(p>0)$，将 $P(1,2)$ 代入，解得 $p=2$，

所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$. 该抛物线的焦点坐标为 $(1,0)$.

【小问 2 详解】

因为直线 $k=1$，过点 $F(1,0)$，所以直线 $l$ 的方程为 $y=x-1$，

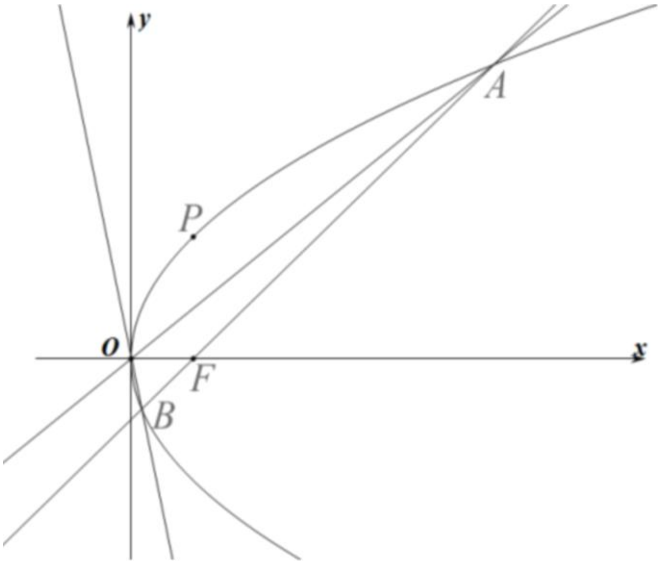
联立 $\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$ 消 $y$ 得 $x^2-6x+1=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$.

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{6^2-4\cdot1}=8$，

（或者利用焦半径公式求弦长：$|AB|=x_1+x_2+p=6+2=8$）

又$h=d=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$S=\dfrac{1}{2}\times8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$




18.【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

【分析】（1）根据正方形性质，结合线面平行判定定理可证；

（2）以$D$为原点，以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$分别为$x$、$y$、$z$轴的正方向建立空间直角坐标系，利用向量法求解可得；

（3）利用平面法向量和直线方向向量求解即可.

【小问1详解】

证明：因为$ABCD$为正方形，所以$BC\parallel AD$，

因为$BC\not\subset$平面$PAD$， $AD\subset$平面$PAD$，

所以$BC\parallel$平面$PAD$.

【小问2详解】

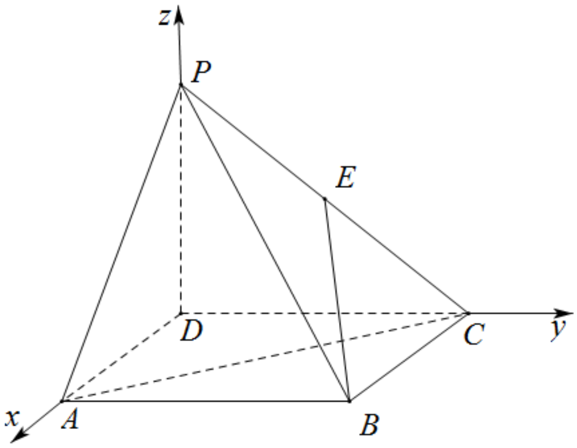
因为$PD\perp$平面$ABCD$， $AD, DC\subset$平面$ABCD$，

所以$PD\perp AD$， $PD\perp DC$，

又因为底面$ABCD$是正方形，所以$AD\perp DC$，

如图，以$D$为原点，以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DP}$分别为$x$、$y$、$z$轴的正方向建立空间直角坐标系，

则$A(2,0,0),C(0,2,0),B(2,2,0),E(0,1,1)$，




则 $\overrightarrow{AC}=\left(-2,2,0\right)$， $\overrightarrow{EB}=\left(2,1,-1\right)$，

所以 $\cos\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EB}=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{EB}\right|}=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线 $AC$ 与 $EB$ 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

【小问 3 详解】

易知，平面 $PAD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(0,1,0\right)$，

由（2）知 $\overrightarrow{EB}=\left(2,1,-1\right)$，

设直线 $EB$ 与平面 $PAD$ 所成角为 $\theta$，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{EB},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{EB}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

19. 【答案】（1）证明见解析

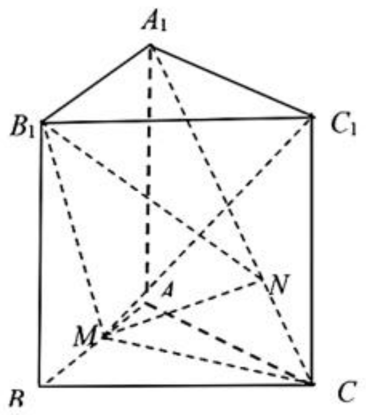
（2）$\dfrac{3}{7}$

（3）存在；$\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{1}{2}$

【分析】（1）依题意可得 $AB\perp CM$，由直棱柱的性质得到 $CC_1\perp AB$，即可得证；

（2）（3）建立空间直角坐标系，利用空间向量法计算可得.

【小问 1 详解】



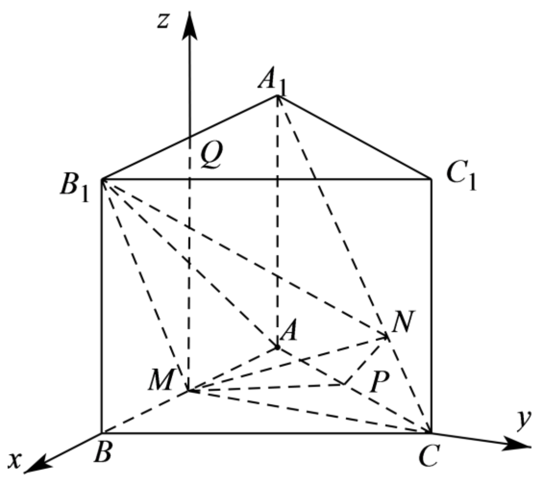

由于 $AM=MB$， $AC=BC$，所以 $AB\perp CM$，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1\perp$ 平面 $ABC$， $AB\subset$ 平面 $ABC$，所以 $CC_1\perp AB$，

又 $CM\cap CC_1=C$， $CM,CC_1\subset$ 平面 $MCC_1$，所以 $AB\perp$ 平面 $MCC_1$.

【小问 2 详解】

如图，




取 $A_1B_1$ 中点 $Q$，由于 $AA_1\perp$ 平面 $ABC$， $MQ//AA_1$，因此 $MQ\perp$ 平面 $ABC$，

又因为 $AC=BC$，所以 $MB\perp MC$，故 $MB$， $MC$,， $MQ$ 两两垂直，

以 $M$ 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{MB}$， $\overrightarrow{MC}$， $\overrightarrow{MQ}$ 的方向为 $x$， $y$， $z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系 $M-xyz$.

则 $A\left(-1,0,0\right)$， $A_1\left(-1,0,3\right)$， $C\left(0,2,0\right)$， $B_1\left(1,0,3\right)$， $M\left(0,0,0\right)$， $N\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},1\right)$.

所以 $\overrightarrow{A_1C}=\left(1,2,-3\right)$， $\overrightarrow{MB_1}=\left(1,0,3\right)$， $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},1\right)$，

设平面 $B_1MN$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+3z=0\\-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}y+z=0\end{cases}$，取$\begin{cases}x=3\\y=\dfrac{3}{2}\\z=-1\end{cases}$，则$\overrightarrow{n_1}=\left(3,\dfrac{3}{2},-1\right)$，

平面 $B_1MA$ 的法向量可以为$\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，

设所求二面角为$\theta$，则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+(-1)^2}}\right|=\dfrac{3}{7}$，

即二面角 $N-B_1M-A$ 的余弦值为$\dfrac{3}{7}$.

【小问 3 详解】

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(1,2,0)=(\lambda,2\lambda,0)(0\le\lambda\le1)$，

则$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=(-1,0,0)+(\lambda,2\lambda,0)=(\lambda-1,2\lambda,0)$，

因为平面 $B_1MN$ 的法向量$\overrightarrow{n_2}=\left(3,\dfrac{3}{2},-1\right)$，

若点 $P$ 在平面 $B_1MN$ 内，则$\overrightarrow{MP}$垂直于$\overrightarrow{n_2}$，

所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{n_2}=(\lambda-1,2\lambda,0)\cdot\left(3,\dfrac{3}{2},-1\right)=6\lambda-3=0$，解得$\lambda=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，

所以棱 $AC$ 上存在点 $P$，使得点 $P$ 在平面 $B_1MN$ 内，此时$\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

20.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) $y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}(x-1)$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 利用条件直接求 $a,b,c$ 即可；

(2) 设直线 $l$ 方程，联立椭圆方程，利用椭圆的弦长公式及韦达定理计算即可；

(3) 结合 (2) 的结论利用韦达定理及斜率公式化简计算即可.

【小问 1 详解】

依题意 $2a=2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，

因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$c=1$，

所以$b^2=a^2-c^2=1$，

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

【小问 2 详解】

椭圆的右焦点 $F(1,0)$.

由已知可知，直线 $l$ 的斜率存在，设直线 $l$： $y=k(x-1)$，

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，消 $y$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，

易知 $\Delta=8k^2+8>0$ 恒成立，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4},$$

所以 $\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}=\frac{5}{4}$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$；

所以直线的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-1)$

【小问 3 详解】

证明：由上问可知 $y=k(x-1)$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

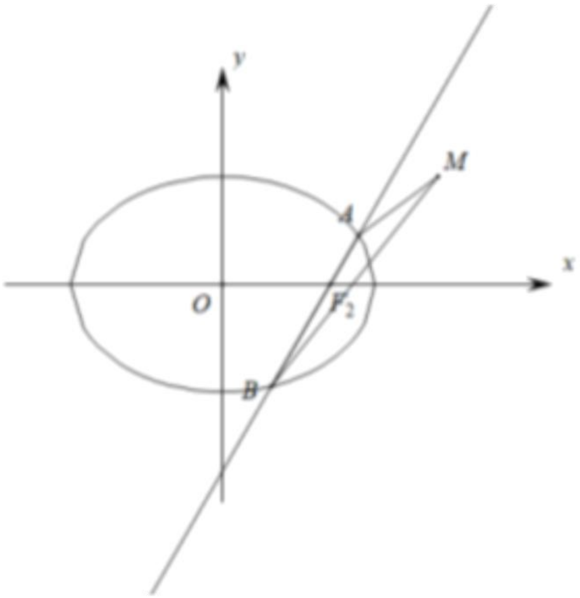
$$k_1+k_2=\frac{1-y_1}{2-x_1}+\frac{1-y_2}{2-x_2}=\frac{(1-y_1)(2-x_2)+(1-y_2)(2-x_1)}{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}$$

分子化为 $4-(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+x_2y_1+x_1y_2=2kx_1x_2-(1+3k)(x_1+x_2)+4k+4$ .

所以 $k_1+k_2=\dfrac{2k\times\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}-(1+3k)\times\frac{4k^2}{1+2k^2}+4k+4}{4-2\times\frac{4k^2}{1+2k^2}+\frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}}$

$$=\frac{2k\times2(k^2-1)-4k^2(1+3k)+4(k+1)(1+2k^2)}{4(1+2k^2)-8k^2+2(k^2-1)}=\frac{4k^2+4}{2k^2+2}=2$$

综上所述， $k_1+k_2$ 为定值 2.




【点睛】第三问关键在于利用韦达定理及斜率公式化简，计算量较大，需要多加练习提升计算能力.

21.【答案】(1) ① $\|a\|=4$，$\|b\|=|2x|$；② $\|a-b\|_{\min}=2$，此时 $x=2$

(2) 证明见解析　(3) $\dfrac{2}{3}$

【分析】(1) ①直接由定义 $\|\vec{m}\|$ 即可得解；②在同一直角坐标系中，画出

$y=|3-x|, y=|-4+x|, y=|2-2x|$ 的图象，从而即可得到 $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ 的表达式以及最小值.

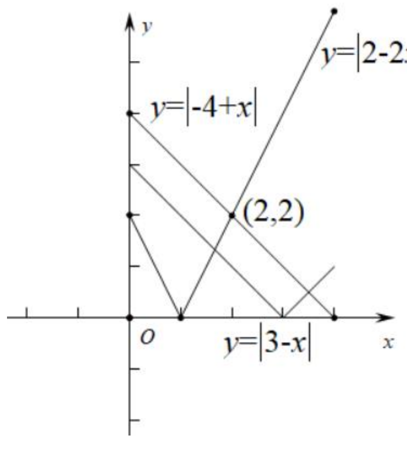
(2) 直接由定义 $\|\vec{m}\|$ 即可得证.

(3) 由四点共面的充要条件，结合定义 $\|\vec{m}\|$ 以及三角不等式即可求解，注意取等条件.

【小问 1 详解】

①因为 $|-4|\geq|3|\geq|2|, |2x|\geq|x|=|-x|$，所以 $\|a\|=4$，$\|b\|=|2x|$；

②由题意 $\vec{a}-\vec{b}=(3-x,-4+x,2-2x)$，如图所示：



从而 $\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|=\begin{cases}-x+4,0\le x\le 2\\ 2x-2,2<x\le 4\end{cases}$，$\left\|a-b\right\|_{\min}=2$，此时 $x=2$

【小问 2 详解】

$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\max\left\{\left|x_1+x_2\right|,\left|y_1+y_2\right|,\left|z_1+z_2\right|\right\}\le\max\left\{\left|x_1\right|+\left|x_2\right|,\left|y_1\right|+\left|y_2\right|,\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right\}$,

因为 $\left\|\vec{a}\right\|=\max\left\{\left|x_1\right|,\left|y_1\right|,\left|z_1\right|\right\}$ ，$\left\|\vec{b}\right\|=\max\left\{\left|x_2\right|,\left|y_2\right|,\left|z_2\right|\right\}$,

所以 $\left|x_1\right|,\left|y_1\right|,\left|z_1\right|\le\left\|\vec{a}\right\|$，$\left|x_2\right|,\left|y_2\right|,\left|z_2\right|\le\left\|\vec{b}\right\|$,

所以 $\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|,\left|y_1\right|+\left|y_2\right|\le\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|,\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\le\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$,

所以 $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|\le\max\left\{\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|,\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|,\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|\right\}=\left\|\vec{a}\right\|+\left\|\vec{b}\right\|$ .

【小问 3 详解】

由题意 $Q,A,B,C$ 四点共面，所以由四点共面的充要条件可知

$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+(1-x-y)\overrightarrow{OC}=(2x,2y,2-2x-2y)$,

由（2）可知，$\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|=\max\left\{\left|2x\right|,\left|2y\right|,\left|2-2x-2y\right|\right\}\ge\left|2x\right|,\left|2y\right|,\left|2-2x-2y\right|$,

从而 $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|=\max\left\{\left|2x\right|,\left|2y\right|,\left|2-2x-2y\right|\right\}\ge\dfrac{\left|2x\right|+\left|2y\right|+\left|2-2x-2y\right|}{3}\ge\dfrac{\left|2x+2y+2-2x-2y\right|}{3}=\dfrac{2}{3}$,

所以 $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\|_{\min}=\dfrac{2}{3}$，等号成立当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{3}$.

【点睛】关键点点睛：第一问①，第二问直接由定义即可求解，至于第一问②，最好是通过画图，以此来避免繁琐的分类讨论，第三问的关键是注意对四点共面的充要条件以及三角不等式的运用.