11 月 8 日北京九中 2023~2024 学年度第一学期期中高二数学 8

一、单选题（本大题共 14 小题，共 70.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，下列结论正确的是(　)

A. 若$l\perp m$，$m\subset\alpha$，则$l\perp\alpha$　　B. 若$l//\alpha$，$m\subset\alpha$，则$l//m$

C. 若$\alpha//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则$l//m$　　D. 若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$

2. 直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的倾斜角为

(　)

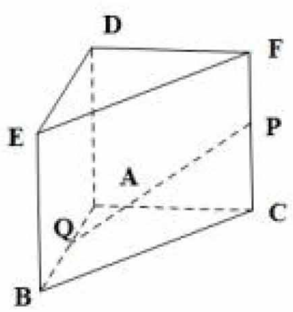
A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 已知圆C的方程为$(x-1)^2+y^2-2=0$，则圆心C的坐标为

(　)

A. $(-1,0)$　　B. $(1,2)$　　C. $(1,0)$　　D. $(1,-2)$

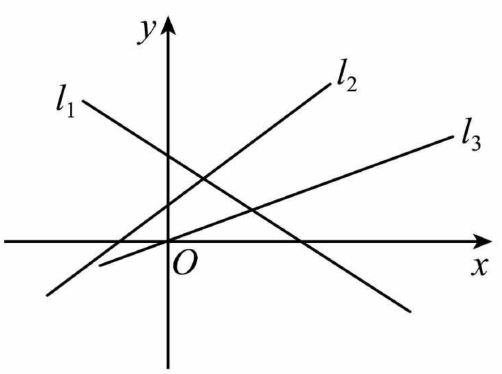
4. 如图，在三棱柱$ABC-DEF$中，P，Q分别是CF，AB的中点，$\overrightarrow{PQ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}$，则$a+b+c=$(　)



A. 1　　B. -1　　C. 0.5　　D. -2

5. 已知直线l_1，l_2，l_3的斜率分别是k_1，k_2，k_3，如图所示，则

(　)



A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_3<k_2<k_1$　　C. $k_1<k_3<k_2$　　D. $k_3<k_1<k_2$

6. 已知l、m、n是直线，α是平面，且$m \subset \alpha$，$n//\alpha$，则“$l \perp m$，$l \perp n$”是“$l \perp \alpha$”的(　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

7. 直线l的一个方向向量为$\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$，平面$\beta$的一个法向量$\overrightarrow{v_2}=-(2,4,2)$，则直线$l$与平面$\beta$(　)

A. 平行　　B. 垂直　　C. 相交　　D. 不能确定

8. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$两两之间的夹角都为 60°，其模都为 1，则$|\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}|=$(　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\sqrt{6}$

9. 直线$x+ay-7=0$ 与直线$(a+1)x+2y-14=0$ 平行，则a的值是

(　)

A. 1　　B. -2　　C. 1 或-2　　D. -1 或 2

10. 已知直线 $2x+my-1=0$ 与直线 $3x-2y+n=0$ 垂直，垂足为$(2,p)$，则$p+m+n$的值为

(　)

A. -6　　B. 6　　C. 4　　D. 10

11. 已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=2$，则异面直线AC_1与BD所成角的余弦值

(　)

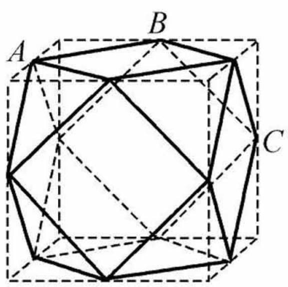
A. 0　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

12. 已知两定点$A(-3,5)$，$B(2,8)$，动点P在直线$x-y+1=0$ 上，那么$|PA|+|PB|$的最小值为

(　)

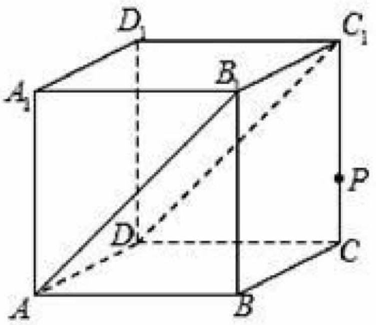
A. $5\sqrt{13}$　　B. $\sqrt{34}$　　C. $5\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{26}$

13. “阿基米德多面体”也称为半正多面体($semi-regularsolid$)，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美．如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形、六个面为正方形的一种半正多面体．已知$AB=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则该半正多面体外接球的表面积为



A. 18π　　B. 16π　　C. 14π　　D. 12π

14. 若点N为点M在平面α上的正投影，则记$N = f_{\alpha}(M)$.如图，在棱长为 1 的正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$中，记平面AB_1C_1D为β，平面$ABCD$为γ，点P是棱CC_1上一动点(与C、C_1不重合)$Q_1 = f_{\gamma}[f_{\beta}(P)]$，$Q_2 = f_{\beta}[f_{\gamma}(P)]$.给出下列三个结论：



①线段PQ_2长度的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

②存在点P使得$PQ_1//$平面β；

③存在点P使得$PQ_1 \perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

(　)

A. ①②③　　　B. ②③　　　C. ①③　　　D. ①②

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

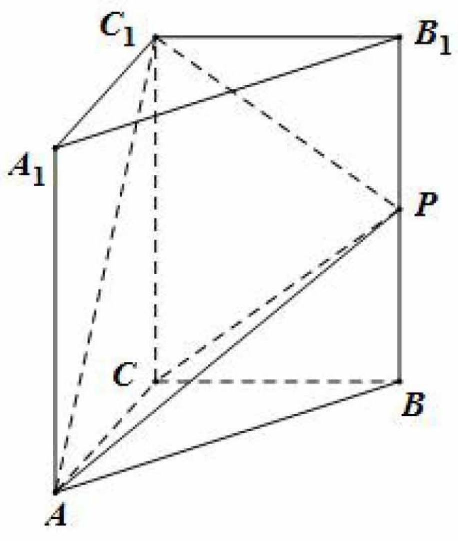
15. 已知直线l的方程为 $3x + 4y - 12 = 0$，直线l与坐标轴交于A，B两点，则$\triangle AOB$的面积为_____.

16. 在正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$中，$AB = \sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC_1} =$ _____.

17. 已知方程$x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m^2 - 1 = 0$ 表示圆，则实数m的取值范围是_____.

18. 已知点$M(a,b)$在直线 $3x - 4y + 25 = 0$ 上，则$\sqrt{a^2 + b^2}$的最小值为_____.

19. 我国古代数学名著《九章算术》中记载，斜解立方为“堑堵”，即底面是直角三角形的直三棱柱(直三棱柱为侧棱垂直于底面的三棱柱).如图，棱柱 $\mathrm{ABC - A_1B_1C_1}$为一个“堑堵”，底面ABC的三边中的最长边与最短边分别为AB，AC，且$AB = 5$，$AC = 3$，点P在棱BB_1上，且$PC \perp PC_1$，则当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，异面直线AA_1与PC_1所成的角的余弦值为________.



三、解答题（本大题共 5 小题，共 55.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

20. (本小题 10.0 分)

已知直线l过点$P(2,3)$，根据下列条件分别求直线l的方程

(I)直线l的倾斜角等于 $120°$；

$(1I)$直线l在x轴、y轴上的截距之和等于 0.

21. (本小题 10.0 分)

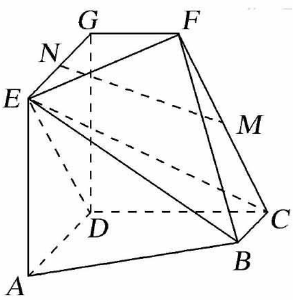
已知点$A(-2,1)$，$B(1,-5)$，$P(2,3)$，直线l经过点P.

(I)若$l\perp AB$，求l的方程；

(II)若A，B分别到l的距离相等，求l的方程.

22. (本小题 11.0 分)

如图，AD//BC 且 AD = 2BC，AD ⊥ CD，EG//AD 且 EG = AD，CD//FG 且 CD = 2FG，DG ⊥平面$ABCD$，DA = DC = DG = 2.



(1)若M为CF的中点，N为EG的中点，求证：MN//平面CDE；

(2)求二面角$E-\mathrm{BC}-F$的正弦值；

(3)求直线AD到平面EBC的距离.

23. (本小题 12.0 分)

如图 1，在边长为 4 的菱形$ABCD$中，$\angle DAB=60°$，点M，N分别是边BC，CD的中点，$AC\cap BD=O_1$，$AC\cap MN=G$.沿MN将$\triangle CMN$翻折到$\triangle PMN$的位置，连接PA，PB，PD，得到如图 2 所示的五棱锥$P-ABMND$.

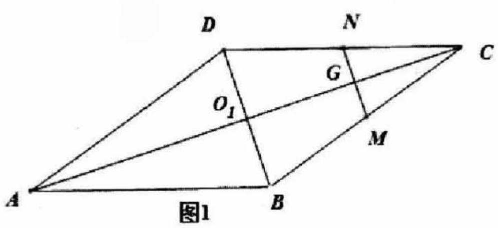


图1

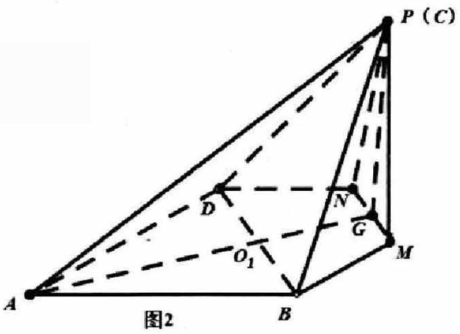


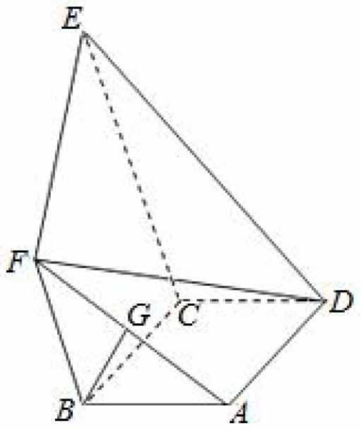
图2

(1)在翻折过程中是否总有平面$PBD\perp$平面PAG？证明你的结论；

(2)当四棱锥$P-MNDB$体积最大时，求直线PB和平面$MNDB$所成角的正弦值；

24. (本小题 12.0 分)

如图，四边形$ABCD$为矩形，四边形$BCEF$为直角梯形，$BF//CE$，$BF \perp BC$，$CE = 2BF = 2AB = 4$，$\angle ABF = DCE = 120°$，G是AF中点.



(1)求证：$AF//$平面DCE；

(2)求证：$BG \perp DF$；

(3)若二面角$E-DF-A$的大小为 150°，求线段DF的长.

11 月 8 日北京九中 2023~2024 学年度第一学期期中高二数学 8

一、单选题（本大题共 14 小题，共 70.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知l，m是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，下列结论正确的是(　)

A. 若$l\perp m$，$m\subset\alpha$，则$l\perp\alpha$　　　　B. 若$l//\alpha$，$m\subset\alpha$，则$l//m$

C. 若$\alpha//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则$l//m$　　　　D. 若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$

【答案】D

【解析】【分析】

本题考查直线与直线、直线与平面的位置关系，考查空间想象能力，属于基础题.

结合条件逐项判断即可.

【解答】

解：对于A，由线面垂直的判定定理可知当直线l垂直平面α内的两条相交直线时，$l\perp\alpha$才成立，所以A不正确；

对于B，若$l//\alpha$，$m\subset\alpha$，则$l//m$或l，m异面，所以B不正确；

对于C，若$\alpha//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则$l//m$或异面，不正确；

对于D，若$l\perp\alpha$，$m//\alpha$，则$l\perp m$，正确.

2. 直线$\sqrt{3}x-y+1=0$ 的倾斜角为

(　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　　　B. $\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查求直线的倾斜角，属于基础题.

根据斜率与倾斜角的关系即可求.

【解答】

解：化直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 为 $y=\sqrt{3}x+1$，所以直线的斜率 $k=\sqrt{3}$，

令直线的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=\sqrt{3}$，$\because 0\le\theta<\pi$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$.

故选：C.

3. 已知圆C的方程为$(x-1)^2+y^2-2=0$，则圆心C的坐标为

(　)

A. $(-1,0)$　　　　B. $(1,2)$　　　　C. $(1,0)$　　　　D. $(1,-2)$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查圆的标准方程，属于简单题．

将圆C的方程转化为标准形式，再得到圆心C的坐标即可．

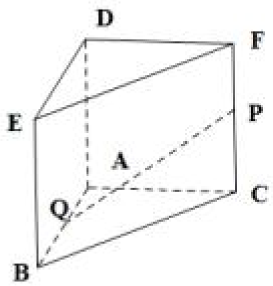
【解答】

解：圆C的方程为$(x-1)^2+y^2-2=0$，则圆C的标准方程为$(x-1)^2+y^2=2$，

所以圆心C的坐标为$(1,0)$．

故选：C．

4. 如图，在三棱柱$ABC-DEF$中，P，Q分别是CF，AB的中点，$\overrightarrow{PQ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}$，则$a+b+c=($　$)$



A. 1　　B. -1　　C. 0.5　　D. -2

【答案】B

【解析】【分析】

本题考查空间向量的线性运算，属于基础题．

根据空间向量的线性运算可得$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，可得$a$，$b$和$c$的值，从而得出$a+b+c$的值．

【解答】

解：$\because$在三棱柱$ABC-DEF$中，P，Q分别是CF，AB的中点，

则$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{FC}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

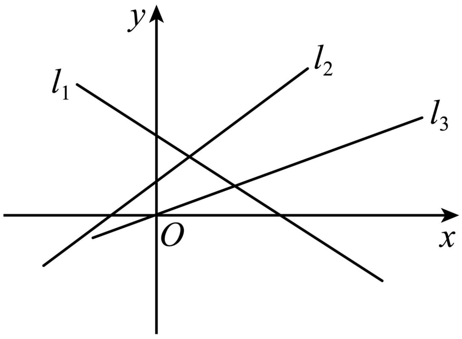
而依题意，$\overrightarrow{PQ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}+c\overrightarrow{AD}$，

所以$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，$c=-\frac{1}{2}$，

所以$a+b+c=-1$.

故选 B.

5. 已知直线l_1，l_2，l_3的斜率分别是k_1，k_2，k_3，如图所示，则(　)



A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_3<k_2<k_1$　　C. $k_1<k_3<k_2$　　D. $k_3<k_1<k_2$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查倾斜角与斜率、正切函数的单调性，是基础题

解题时根据倾斜角范围判断结合正切函数的性质可判定结果.

【解答】解：设直线l_1，l_2，l_3的倾斜角分别为θ_1，θ_2，θ_3，

根据直线的倾斜角概念及题图，可得$0^\circ<\theta_3<\theta_2<90^\circ<\theta_1<180^\circ$.

再由斜率$k=\tan\theta$及正切函数的单调性可得 $\tan\theta_1<\tan\theta_3<\tan\theta_2$，

故$k_1<k_3<k_2$.故选 C.

6. 已知l、m、n是直线，α是平面，且$m\subset\alpha$，$n//\alpha$，则“$l\perp m$，$l\perp n$”是“$l\perp\alpha$”的(　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】解：由$n//\alpha$得：

存在$n'\subset\alpha$，满足$n//n'$，

若$l\perp\alpha$，则直线l垂直平面α中任意一条直线，

$\because m\subset\alpha$，$n'\subset\alpha$，$\therefore l\perp m$，$l\perp n'$，

$\because n//n'$，$\therefore l\perp n'$，

$\because l\perp m$，$l\perp n$，m，n是否相交不确定，$\therefore l\perp\alpha$不一定成立，

$\therefore$“$l\perp m$，$l\perp n$”是“$l\perp\alpha$”的必要不充分条件.

故选：B.

由线面垂直的判定与性质定理即可得出.

本题考查了线面垂直的判定与性质定理、充分条件、必要条件等基础知识，是基础题.

7. 直线l的一个方向向量为$\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$，平面$\beta$的一个法向量$\overrightarrow{v_2}=-(2,4,2)$，则直线$l$与平面$\beta$(　)

A. 平行　　　　B. 垂直　　　　C. 相交　　　　D. 不能确定

【答案】B

【解析】解：因为直线l的一个方向向量为$\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$，平面$\beta$的一个法向量$\overrightarrow{v_2}=-(2,4,2)$，

所以$\overrightarrow{v_2}=-2\overrightarrow{v_1}$，

即$\overrightarrow{v_1}//\overrightarrow{v_2}$，

故直线$l\perp$平面β.

故选：B.

由题意$\overrightarrow{v_2}=-2\overrightarrow{v_1}$，根据直线与平面垂直的判定定理判断即可.

本题考查了直线与平面垂直的判定，属于基础题.

8. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$两两之间的夹角都为$60°$，其模都为1，则$|\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}|=$(　)

A. $\sqrt{5}$　　　　B. 5　　　　C. 6　　　　D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查空间向量的数量积运算，求向量的模，属于较易题.

由题意可得$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}$，再根据$|\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})^2}$，计算求得结果.

【解答】

解：已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$两两之间的夹角都为$60°$，其模都为1，

则有$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1\times1\times cos60°=\frac{1}{2}$，

$$\therefore |\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})^2}$$

$$=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{c}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{c}-4\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

$=\sqrt{1+1+4-1+2-2}=\sqrt{5}$.

故选 A.

9. 直线$x+ay-7=0$ 与直线$(a+1)x+2y-14=0$ 平行，则a的值是

(　)

A. 1　　B. -2　　C. 1 或-2　　D. -1 或 2

【答案】B

【解析】【分析】

本题主要考查两条直线平行的应用及直线的一般方程，属于基础题.

【解答】

解：∵直线$x+ay-7=0$ 与直线$(a+1)x+2y-14=0$ 平行，

$\therefore 1\times 2-a(a+1)=0$，解得$a=-2$ 或 1，

当$a=1$ 时，两条直线重合，故$a=-2$.

10. 已知直线 $2x+my-1=0$ 与直线 $3x-2y+n=0$ 垂直，垂足为$(2,p)$，则$p+m+n$的值为

(　)

A. -6　　B. 6　　C. 4　　D. 10

【答案】A

【解析】【分析】

本题考查直线的一般式方程和垂直关系，属基础题.

由直线的垂直关系可得m值，再由垂足在两直线上可得n、p的方程组，解方程组计算可得.

【解答】

解：∵直线 $2x+my-1=0$ 与直线 $3x-2y+n=0$ 垂直，

$\therefore 2\times 3+(-2)\cdot m=0$，解得$m=3$，

由垂足在两直线上可得$\begin{cases}4+3p-1=0\\6-2p+n=0\end{cases}$，

解得$p=-1$ 且$n=-8$，$\therefore m+n+p=-6$，

故选：A.

11. 已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1,AB=1,AD=2,AA_1=2$，则异面直线$AC_1$与$BD$所成角的余弦值为

(　)

A. 0　　　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【答案】B

【解析】【分析】

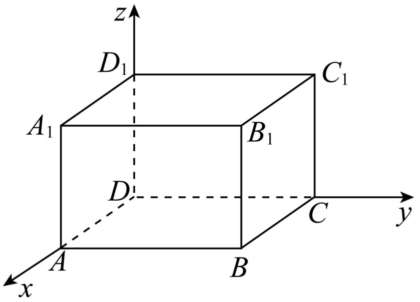
本题考查异面直线所成的角，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

建立空间直角坐标系，求得$\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{BD}$的坐标，利用向量夹角公式即可得出．

【解答】

解：在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知棱长$AB=1$，$AD=2$，$AA_1=2$，

以D为坐标原点，DA，DC，DD_1分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，



则$A(2,0,0)$，$C_1(0,1,2)$，$B(2,1,0)$，$D(0,0,0)$，

$\overrightarrow{AC_1}=(-2,1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-1,0)$，

$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$，$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}$，

$\cos<\overrightarrow{AC_1}，\overrightarrow{BD}>=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选B.

12. 已知两定点$A(-3,5)$，$B(2,8)$，动点P在直线$x-y+1=0$上，那么$|PA|+|PB|$的最小值为

(　)

A. $5\sqrt{13}$　　　　B. $\sqrt{34}$　　　　C. $5\sqrt{5}$　　　　D. $2\sqrt{26}$

【答案】D

【解析】【分析】

本题考查点关于直线对称的应用，属于中档题．

求出点A关于直线$x-y+1=0$的对称点A'，则$|A'B|$即为所求．

【解答】

解：设点A关于直线$x-y+1=0$的对称点为$A'(a,b)$．

则$\begin{cases}\frac{b-5}{a+3}=-1\\ \frac{a-3}{2}-\frac{b+5}{2}+1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4\\ b=-2\end{cases}$，

所以$A'(4,-2)$.

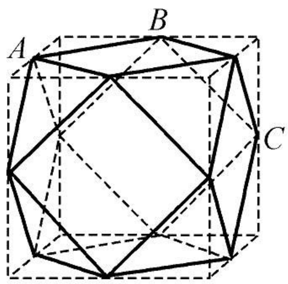
得$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|$，可知当A'，P，B三点共线的时候取最小值，

即$|PA'|+|PB|\geqslant|A'B|$，

又$|A'B|=\sqrt{(2-4)^2+(8+2)^2}=2\sqrt{26}$.

故选D.

13．“阿基米德多面体”也称为半正多面体$(semi-regularsolid)$，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美．如图所示，将正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形、六个面为正方形的一种半正多面体．已知$AB=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则该半正多面体外接球的表面积为



A. 18π　　B. 16π　　C. 14π　　D. 12π

【答案】A

【解析】【分析】

本体考查简单多面体的结构特征，球的表面积公式，属于中档题.

根据题意分析多面体的特点，从而可求出外接球的表面积.

【解答】解：由已知，$AB=\frac{3\sqrt{2}}{2}$故该几何体是由棱长为3的正方体截去8个角，

其中截去的每一个角均是底面是边长为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，侧棱长为$\frac{3}{2}$的正三棱锥，

根据几何体的对称性可知，该几何体的外接球球心仍为原正方体中心，

中心到各个顶点的距离相等，均为$d=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

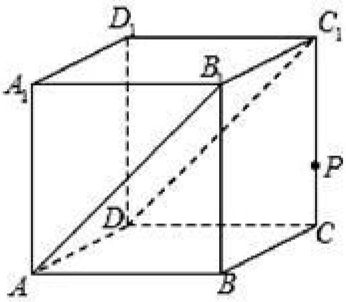
即$R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

∴该二十四等边体外接球的表面积为$S=4\pi R^2=4\pi\times(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=18\pi$，

故选：A.

14. 若点N为点M在平面α上的正投影，则记$N=f_{\alpha}(M)$.如图，在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，记平面AB_1C_1D为β，平面$ABCD$为γ，点P是棱CC_1上一动点(与C、C_1不重合)$Q_1=f_{\gamma}[f_{\beta}(P)]$，$Q_2=f_{\beta}[f_{\gamma}(P)]$.

给出下列三个结论：



①线段PQ_2长度的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

②存在点P使得$PQ_1//$平面β；

③存在点P使得$PQ_1\perp PQ_2$.

其中，所有正确结论的序号是

(   )

A. ①②③　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②

【答案】D

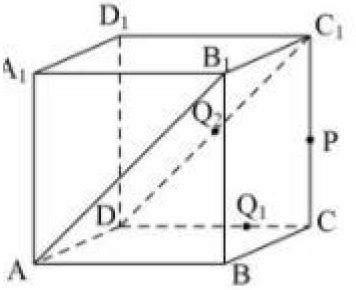
【解析】【分析】

本题考查命题的真假判断，考查新定义问题，考查空间位置关系等，属于难题.

根据定义可设点P在β内投影为P'，则$PP'=\frac{\sqrt{2}}{2}C_1P$，设$P'$在$\gamma$内投影为$Q_1$，则$CQ_1=\frac{\sqrt{2}}{2}PP'=\frac{1}{2}C_1P$，逐一进行判断即可

【解答】

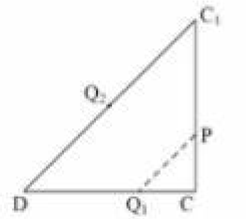
解：设点P在β内投影为P'，则$PP'=\frac{\sqrt{2}}{2}C_1P$，设$P'$在$\gamma$内投影为$Q_1$，则$CQ_1=\frac{\sqrt{2}}{2}PP'=\frac{1}{2}C_1P$，

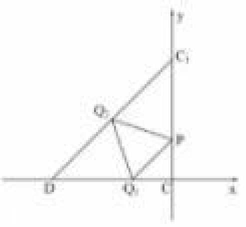


①当P为CC_1中点时，距Q_2最近，$|PQ_2|=\frac{1}{2}$，当P在C_1时，$|PQ_2|$最大，此时$|PQ_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为P与C不重合，所以，$|PQ_2|$的范围是$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，故①正确；

②由条件可知，P，Q_1，Q_2在平面C_1CD中，将其画出，假设$PQ_1//\beta$成立，则$PQ_1//C_1D$，





设$CQ=x$，则$PC=x$，所以$C_1P=2CQ=2x$，$PC+PC_1=x+2x=3x=1$，则$x=\frac{1}{3}$，

所以$CQ_1=\frac{1}{3}$，$CD=\frac{1}{3}$，即存在点P使得$PQ_1//\beta$，故②正确；

③设$CQ_1=x$，以C为原点建系得$Q_1(-x,0)$，$P(0,1-2x)$，$Q_2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

假设$PQ_1\perp PQ_2$.则$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=0$，

即$(-x,2x-1)\cdot(-\frac{1}{2},2x-\frac{1}{2})$

$=4x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$，此时$\Delta<0$，方程无解，故③不成立，

故选 D.

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

15. 已知直线l的方程为 $3x+4y-12=0$，直线l与坐标轴交于A，B两点，则$\triangle AOB$的面积为_____.

【答案】6

【解析】【分析】

略

【解答】

略

16. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC_1}=$ _____.

【答案】2

【解析】【分析】

本题考查空间向量的数量积计算，属于基础题.

【解答】

解：在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，因为$AB=\sqrt{2}$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2$.

17. 已知方程$x^2+y^2-2mx+4my+6m^2-1=0$表示圆，则实数m的取值范围是______.

【答案】$(-1,1)$

【解析】【分析】

本题考查了圆的一般方程，属于基础题.

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$表示圆的条件是$D^2+E^2-4F>0$，构造不等式可得m的范围.

【解答】

解：方程$x^2+y^2-2mx+4my+6m^2-1=0$表示圆，

则$(-2m)^2+(4m)^2-4(6m^2-1)>0$，化简得$m^2-1<0$

解得：$-1<m<1$.

故答案为$(-1,1)$.

18. 已知点$M(a,b)$在直线$3x-4y+25=0$上，则$\sqrt{a^2+b^2}$的最小值为______.

【答案】5

【解析】【分析】

本题考查点到直线的距离公式，属于基础题.

据题意可知，$\sqrt{a^2+b^2}$表示原点到直线$3x-4y+25=0$上的点$M(a,b)$的距离，求出原点到直线$3x-4y+25=0$的距离为5，从而可得出$\sqrt{a^2+b^2}$的最小值.

【解答】

解：根据题意知，$\sqrt{a^2+b^2}$表示原点到直线$3x-4y+25=0$上的点$M(a,b)$的距离，

$\therefore\sqrt{a^2+b^2}$大于等于原点到直线$3x-4y+25=0$的距离，

因为原点到直线$3x-4y+25=0$的距离为$\frac{25}{\sqrt{9+16}}=5$，

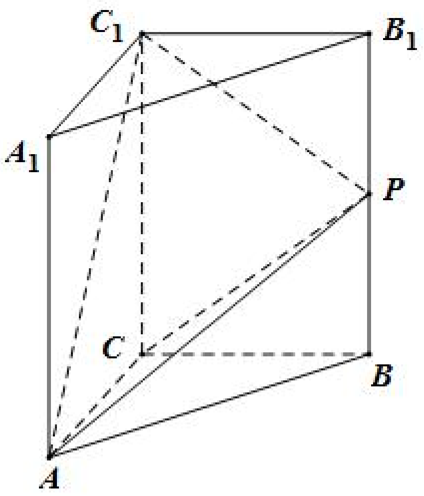
$\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geq5$，

$\therefore\sqrt{a^2+b^2}$的最小值为5.

故答案为：5.

19. 我国古代数学名著《九章算术》中记载，斜解立方为“堑堵”，即底面是直角三角形的直三棱柱(直三棱柱为侧棱垂直于底面的三棱柱).如图，棱柱$\mathrm{ABC}-\mathrm{A_1B_1C_1}$为一个“堑堵”，底面$ABC$的三边中的最长边与

最短边分别为AB，AC，且$AB=5$，$AC=3$，点P在棱BB_1上，且$PC\perp PC_1$，则当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，异面直线AA_1与PC_1所成的角的余弦值为________.



【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】【分析】

本题考查异面直线所成角的问题，考查线面垂直的判定，考查基本不等式在求最值方面的应用，题目较难.

设直三棱柱的高为x，$BP=y$，则$B_1P=x-y$，由$PC\perp PC_1$，可得$x=\frac{16+y^2}{y}$，再证明$C_1P\perp$平面ACP，从而得到$AP\perp PC_1$，可得$S_{\triangle APC_1}=\frac{1}{2}\times\sqrt{25+y^2}\times\sqrt{16+(x-y)^2}$，将$x=\frac{16+y^2}{y}$代入，利用基本不等式可求得当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，$y=2\sqrt{5}$，由$B_1B//AA_1$，所以$\angle C_1PB_1$(或其补角)为异面直线$AA_1$与$PC_1$所成的角，从而可求得答案.

【解答】

解：设直三棱柱的高为x，$BP=y$，则$B_1P=x-y$，

因为$\triangle ABC$为直角三角形，且$AB=5$，$AC=3$，则$BC=4$.

所以$PC^2=BC^2+BP^2=16+y^2$，$PC_1^2=B_1C_1^2+B_1P^2=16+(x-y)^2$，

由$PC\perp PC_1$，则$PC^2+PC_1^2=CC_1^2$，即$16+y^2+16+(x-y)^2=x^2$，整理得$x=\frac{16+y^2}{y}$.

由棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为一个“堑堵”，则侧棱垂直于底面，且底面是直角三角形.

所以$CC_1\perp$平面ABC，又$AC\subset$平面ABC，则$CC_1\perp AC$.

又底面ABC是直角三角形，且最长边为AB，则$BC\perp AC$.

又CC_1、BC为平面BCC_1B_1内两条相交直线，

所以$AC\perp$平面BCC_1B_1，$C_1P\subset$平面BCC_1B_1，所以$C_1P\perp AC$，且$PC\perp PC_1$，PC、AC为平面PAC内两条相交直线，

所以$C_1P\perp$平面ACP，$AP\subset$平面ACP，所以$AP\perp C_1P$.

$$S_{\triangle APC_1}=\frac{1}{2}\times AP\times C_1P=\frac{1}{2}\times\sqrt{25+y^2}\times\sqrt{16+(x-y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{25+y^2}\times\sqrt{16+\frac{16^2}{y^2}}=2\sqrt{(25+y^2)(1+\frac{16}{y^2})}$$

$=2\sqrt{41+y^2+\frac{16\times25}{y^2}}\geq2\sqrt{41+2\sqrt{y^2\times\frac{16\times25}{y^2}}}=18$，当且仅当$y^2=\frac{16\times25}{y^2}$，即$y=2\sqrt{5}$时，取得等号.

故当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，$y=2\sqrt{5}$，

由$B_1B//AA_1$，所以$\angle C_1PB_1$(或其补角)为异面直线AA_1与PC_1所成的角.

$B_1B=x=\frac{16+y^2}{y}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$，$B_1P=x-y=\frac{18\sqrt{5}}{5}-2\sqrt{5}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，$C_1P=\sqrt{16+(\frac{8\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\angle C_1PB_1=\frac{|PB_1|}{|PC_1|}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{\frac{12\sqrt{5}}{5}}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 55.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

20. (本小题 10.0 分)

已知直线l过点$P(2,3)$，根据下列条件分别求直线l的方程

(I)直线l的倾斜角等于 120°；

$(1I)$直线l在x轴、y轴上的截距之和等于 0.

【答案】解：(I)设直线l的斜率为k，则$k=tan120°=-\sqrt{3}$，

又直线过点$P(2,3)$，

所以直线的点斜式方程为$y-3=-\sqrt{3}(x-2)$，

化为一般形式为$\sqrt{3}x+y-3-2\sqrt{3}=0$；

$(1I)$设直线l在x轴、y轴上的截距分别为a、b，

由题意知，$a+b=0$，即$b=-a$；

①若$b=-a=0$ 时，则直线l又过点$(0,0)$，

可得直线l的方程为：$3x-2y=0$；

②若$b=-a\neq0$ 时，则直线l的方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，

将点$P(2,3)$代入得：$\frac{2}{a}+\frac{3}{-a}=1$，解得$a=-1$，

可得直线l的方程为：$x-y+1=0$；

所以直线l的方程为：$3x-2y=0$ 或$x-y+1=0$．

【解析】本题考查了直线的倾斜角与斜率应用问题，也考查了直线的截距应用问题，是基础题．

(I)利用倾斜角求出直线l的斜率，再利用点斜式写出方程，化为一般式方程；

$(1I)$设直线l在x轴、y轴上的截距分别为a、b，讨论①$b=-a=0$ 和②$b=-a\neq 0$ 时，分别求出直线l的方程．

21. (本小题 10.0 分)

已知点$A(-2,1)$，$B(1,-5)$，$P(2,3)$，直线l经过点P．

(I)若$l\perp AB$，求l的方程；

(II)若A，B分别到l的距离相等，求l的方程．

【答案】解：(I)由题意，得$k_{AB}=\frac{1-(-5)}{-2-1}=-2$．

$\because l\perp AB$，$\therefore k_l=\frac{1}{2}$.

则l的方程为$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，即$x-2y+4=0$．

(II)若l的斜率不存在，则l的方程为$x=2$，

A，B两点到l的距离分别为 4 和 1，不合题意，

故l的斜率存在，设l的斜率为k，

那么l的方程为$y-3=k(x-2)$，

即$kx-y+3-2k=0$，

由题意，得$\frac{|-2k-1+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|k+5+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

即$|2-4k|=|8-k|$，解得$k=-2$ 或$k=2$．

则l的方程为 $2x+y-7=0$ 或 $2x-y-1=0$．

【解析】本题主要考查了直线的倾斜角与斜率，两条直线垂直的判定，直线的点斜式方程，点到直线的距离的应用，属基础题．

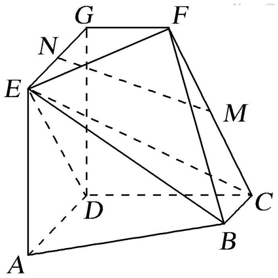
(I)根据已知及直线的倾斜角与斜率，两条直线垂直的判定，直线的点斜式方程，直接可求出直线l的方程，

(II)注意分类讨论，结合点到直线的距离的计算，即可求出斜率k的值，则l的方程可求．

22. (本小题 11.0 分)

如图，AD//BC 且 AD = 2BC，AD ⊥ CD，EG//AD 且 EG = AD，CD//FG 且 CD = 2FG，DG ⊥平面$ABCD$，DA =

$DC = DG = 2$.

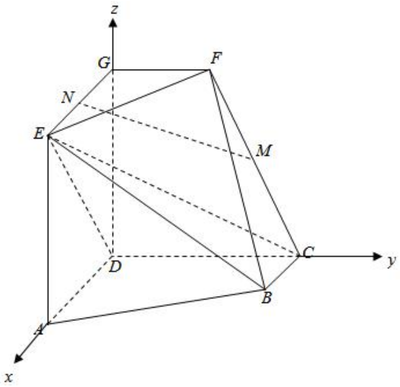


(1)若M为CF的中点，N为EG的中点，求证：$MN//$平面CDE；

(2)求二面角$E-BC-F$的正弦值；

(3)求直线AD到平面EBC的距离.

【答案】(1)证明：依题意，以D为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DG}$的方向为x轴，y轴，z轴的正方向建立空间直角坐标系.



可得$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(1,2,0)$，$C(0,2,0)$，

$E(2,0,2)$，$F(0,1,2)$，$G(0,0,2)$，$M(0,\frac{3}{2},1)$，$N(1,0,2)$.

设$\overrightarrow{n_0}=(x,y,z)$为平面$CDE$的法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{DC}=2y=0\\ \overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{DE}=2x+2z=0\end{cases}$，不妨令$z=-1$，可得$\overrightarrow{n_0}=(1,0,-1)$；

又$\overrightarrow{MN}=(1,-\frac{3}{2},1)$，可得$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{n_0}=0$.

又$\because MN\not\subset$平面CDE，

$\therefore MN//$平面CDE；

(2)解：依题意，可得$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}=(0,-1,2)$.

设$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$为平面BCE的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=x_1-2y_1+2z_1=0\end{cases}$，不妨令$z_1=1$，可得$\vec{n}=(0,1,1)$.

设$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$为平面BCF的法向量，

则$\begin{cases} \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BC}=-x_2=0 \\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{CF}=-y_2+2z_2=0 \end{cases}$，不妨令$z_2=1$，可得$\overrightarrow{m}=(0,2,1)$.

因此有 $\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\sin<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore$二面角$E-BC-F$的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(3) $\because AD//BC$，$BC\subset$平面EBC，$AD\not\subset$平面EBC，

$\because AD//$平面EBC，

$\therefore AD$到平面EBC的距离即A到平面EBC的距离，

设A到平面EBC的距离为d，$\overrightarrow{AE}=(0,0,2)$，

则$d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

【解析】本题考查直线与平面平行的判定、空间距离，考查空间角的求法，训练了利用空间向量求解.

(1)依题意，以D为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DG}$的方向为x轴，y轴，z轴的正方向建立空间直角坐标系. 求出对应点的坐标，求出平面CDE的法向量$\overrightarrow{n_0}$及$\overrightarrow{MN}$，由$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{n_0}=0$，结合$MN\not\subset$平面$CDE$，可得$MN//$平面$CDE$；

(2)分别求出平面BCE与平面BCF的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得二面角$E-BC-F$的正弦值.

(3)AD到平面EBC的距离即A到平面EBC的距离，设A到平面EBC的距离为d，由$d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$可得直线$AD$到平面$EBC$的距离.

23. (本小题 12.0 分)

如图 1，在边长为 4 的菱形$ABCD$中，$\angle DAB=60°$，点M，N分别是边BC，CD的中点，$AC\cap BD=O_1$，$AC\cap MN=G$.沿MN将$\triangle CMN$翻折到$\triangle PMN$的位置，连接PA，PB，PD，得到如图 2 所示的五棱锥$P-ABMND$.

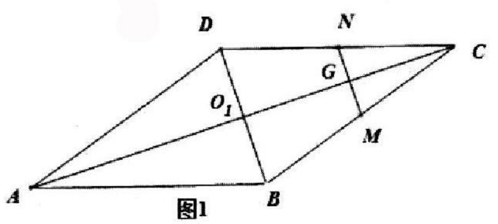


图1

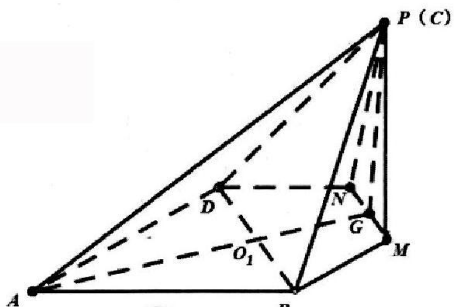


图2

(1)在翻折过程中是否总有平面$PBD\perp$平面PAG？证明你的结论；

(2)当四棱锥$P-MNDB$体积最大时，求直线PB和平面$MNDB$所成角的正弦值；

(3)在(2)的条件下，在线段PA上是否存在一点Q，使得二面角$Q-MN-P$余弦值的绝对值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$？若存在，试确定点Q的位置；若不存在，请说明理由．

【答案】解：(1)在翻折过程中总有平面$PBD\perp$平面PAG，

证明如下：$\because$点M，N分别是边CD，CB的中点，

又$\angle DAB=60^{\circ}$，$\therefore BD//MN$，且$\triangle PMN$是等边三角形，

$\because G$是MN的中点，

$\therefore MN\perp PG$，

$\because$菱形$ABCD$的对角线互相垂直，

$\therefore BD\perp AC$，

$\therefore MN\perp AC$，

$\therefore$在五棱锥$P-ABMND$中，有$MN\perp PG$，$MN\perp AG$，

$\because AG\cap PG=G$，$AG\subset$平面PAG，$PG\subset$平面PAG，

$\therefore MN\perp$平面PAG，$BD//MN$，

$\therefore BD\perp$平面PAG，

$\because BD\subset$平面PBD，

$\therefore$平面$PBD\perp$平面PAG．

(2)由题意知，四边形$MNDB$为等腰梯形，

且$DB=4$，$MN=2$，$O_1G=\sqrt{3}$，

所以等腰梯形$MNDB$的面积$S=\frac{(2+4)\times\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

要使得四棱锥$P-MNDB$体积最大，只要点P到平面$MNDB$的距离最大即可，

$\therefore$当$PG\perp$平面$MNDB$时，点P到平面$MNDB$的距离的最大值为$\sqrt{3}$，

此时四棱锥$P-MNDB$体积的最大值为$V=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$，

直线PB和平面$MNDB$所成角的为$\angle PBG$，

连接BG，在直角三角形$\triangle PBG$中，$PG=\sqrt{3}$，$BG=\sqrt{7}$，

$\sin\angle PBG=\frac{PG}{PB}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

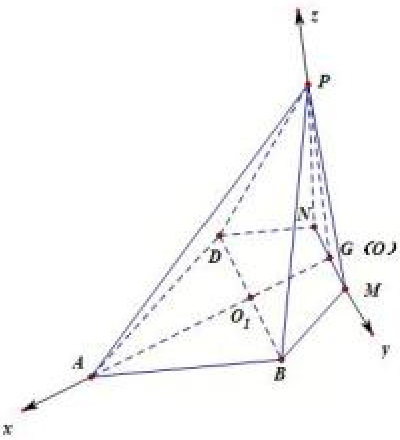
(3)假设符合题意的点Q存在．

由(2)知，$AG\perp PG$，

又$AG\perp MN$，且$MN\cap PG=G$，$MN\subset$平面PMN，$PG\subset$平面PMN，

即$AG\perp$平面PMN，即GA，GM，GP两两垂直，

以G为坐标原点，GA，GM，GP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示空间直角坐标系，



则$A(3\sqrt{3},0,0)$，$M(0,1,0)$，$N(0,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

故平面PMN的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，

设$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AP}(0\leq\lambda\leq1)$，

$\because\overrightarrow{AP}=(-3\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AQ}=(-3\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$，故$Q(3\sqrt{3}(1-\lambda),0,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore\overrightarrow{NM}=(0,2,0)$，

$\overrightarrow{QM}=(3\sqrt{3}(\lambda-1),1,-\sqrt{3}\lambda)$，

平面QMN的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{NM}=0$，$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{QM}=0$，

即$\begin{cases}2y_2=0,\\3\sqrt{3}(\lambda-1)x_2+y_2-\sqrt{3}\lambda z_2=0,\end{cases}$

取$z_2=3(\lambda-1)$，所以$\overrightarrow{n_2}=\big(\lambda,0,3(\lambda-1)\big)$，

则平面QMN的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(\lambda,0,3(\lambda-1))$，

设二面角$Q-MN-P$的平面角为θ，

则$|\cos\theta|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+9(\lambda-1)^2}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

解得：$\lambda=\frac{1}{2}$,

故符合题意的点Q存在且Q为线段PA的中点.

【解析】本题主要考查了线面垂直的判定定理，面面垂直的判定定理，棱锥的体积，利用空间向量求二面角，属于难题.

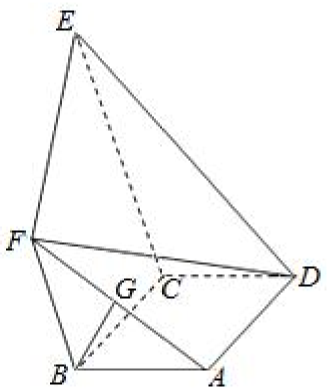
(1)由题意$MN\perp PG$，菱形$ABCD$中，$BD\perp AC$，则$MN\perp AC$，由线面垂直的判定定理可得$MN\perp$平面PAG，由面面垂直的判定定理可得平面$PBD\perp$平面PAG.

(2)求得等腰梯形$MNDB$的面积，当$PG\perp$平面$MNDB$时，点P到平面$MNDB$的距离最大，四棱锥$P-MNDB$体积最大，直线PB和平面$MNDB$所成角为$\angle PBG$，连接BG，在直角三角形$\triangle PBG$中，求解即可.

(3)假设符合题意的点Q存在.以G为坐标原点，GA，GM，GP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立所示空间直角坐标系，写出各点坐标，求得平面PMN的一个法向量，平面QMN的一个法向量，代入夹角公式可得λ的值，从而得出结果.

24. (本小题 12.0 分)

如图，四边形$ABCD$为矩形，四边形$BCEF$为直角梯形，$BF//CE$，$BF\perp BC$，$CE=2BF=2AB=4$，$\angle ABF=DCE=120°$，G是AF中点.



(1)求证：$AF//$平面DCE；

(2)求证：$BG\perp DF$；

(3)若二面角$E-DF-A$的大小为 150°，求线段DF的长.

【答案】证明：(1)在CE上取一点M，使$CM=BF$，连FM，

矩形$ABCD$中$BC//AD$，$BC=AD$

$\because BF//CE$，

$\therefore BF//CM$，

$\therefore$四边形$BCMF$为平行四边形，

$\therefore MF//BC$，$MF=BC$

$\therefore MF//AD$，$MF=AD$

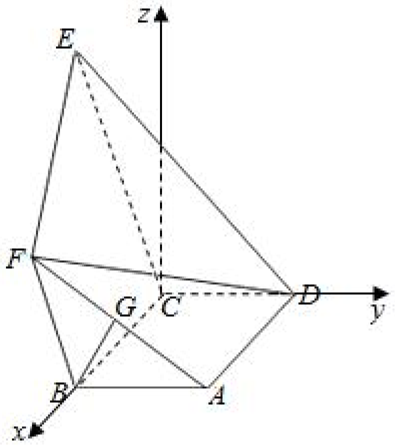
$\therefore$四边形$ADMF$为平行四边形，

$\therefore AF/\ /DM$，

$\because DM\subset$平面DCE，$AF\not\subset$平面DCE，

$\therefore AF/\ /$平面DCE.

(2)以C为坐标原点，CB，CD的方向分别为x，y轴，建立空间直角坐标系．设$AD=a$，



$\because CE=2BF=2AB=4$，$\angle ABF=DCE=120°$，G是AF中点．

$\therefore A(a,2,0)$，$B(a,0,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,\ -2,\ 2\sqrt{3})$，$F(a,\ -1,\ \sqrt{3})$，$G(a,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$．

$\therefore \overrightarrow{BG}=(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{DF}=(a,\ -3,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=(0,\ -4,\ 2\sqrt{3})$，

$$\because \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DF}=(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(a,\ -3,\ \sqrt{3})=0\times a+\frac{1}{2}\times(-3)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=0$$

$\therefore BG\perp DF$，

解：(3) $\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore AB\perp BC$，

又$\because BF\perp BC$，AB，BF是平面ABF内的两条相交直线，

$\therefore BC\perp$平面ABF，

$\because BG\subset$平面ABF，

$\therefore BG\perp BC$，

$\therefore BG\perp AD$，

又$BG\perp DF$

$\because AD$，DF是平面ADF内的两条相交直线，

$\therefore BG\perp$平面ADF，

$\therefore \overrightarrow{BG}=(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$是平面$ADF$的一个法向量，

设平面EDF的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}ax-3y+\sqrt{3}z=0\\ -4y+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$z=2a$，则$y=\sqrt{3}a$，$x=\sqrt{3}$，

即$\overrightarrow{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3}a,2a)$，

$\because$二面角$E-DF-A$的大小为$150°$，

$\therefore |cos150°|=\frac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{BG}|}=\frac{|\frac{\sqrt{3}}{2}a+\sqrt{3}a|}{\sqrt{3+3a^2+4a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore$线段DF的长为$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{a^2+(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

【解析】本题考查线面平行的证明，考查异面直线垂直的证明，考查线段长的求法，是中档题，

(1)在CE上取一点M，使$CM=BF$，连FM，推导出四边形$BCMF$为平行四边形，从而四边形$ADMF$为平行四边形，进而$AF//DM$，由此能证明$AF//$平面DCE.

(2)以C为坐标原点，CB，CD的方向分别为x，y轴，建立空间直角坐标系．利用向量法能证明$BG\perp DF$.

(3)求出平面ADF的一个法向量和平面EDF的一个法向量，利用向量法能求出线段DF的长.