北京师大附中 2023—2024 学年(上)高二期中考试

数 学 试 卷

班级：________ 姓名：__________ 学号：__________

考生须知	1. 本试卷有三道大题，共 6 页。考试时长 120 分钟，满分 150 分。 2. 考生务必将答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效。 3. 考试结束后，考生应将答题纸交回。

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 直线 $x-y+1=0$ 的倾斜角为(　　)

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $135°$　　D. $150°$

2. 已知椭圆 $4x^2+9y^2=36$，则椭圆的长轴长为(　　)

A. 6　　B. 3　　C. 4　　D. 2

3. 如果向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ 2,\ -3)$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

4. 已知空间中两个不同的平面 α、β，直线 $m\perp\beta$，则“$\alpha\perp\beta$”是“$m/\!/\alpha$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 向量 $\boldsymbol{a}=(\cos50°,\ \sin50°)$ 与 $\boldsymbol{b}=(\cos10°,\ \sin10°)$ 的夹角为(　　)

A. $20°$　　B. $30°$　　C. $40°$　　D. $60°$

6．函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象（　　）

A．关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称　　B．关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

C．关于点 $\left(\frac{\pi}{6},\ 0\right)$ 对称　　D．关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},\ 0\right)$ 对称

7．在 ΔABC 中，点 $A(-5,\ 0)$，点 $B(5,\ 0)$，ΔABC 的周长是 22，则点 C 的轨迹方程是（　　）

A．$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{11}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

C．$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{11}=1\ (y\neq 0)$　　D．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1\ (y\neq 0)$

8．三棱锥 $A-BCD$ 中，$AC\perp$ 平面 BCD，$BD\perp CD$，若 $AB=2\sqrt{3}$，$BD=2$，则三棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为（　　）

A．$\frac{4}{3}$　　B．2　　C．$\frac{7}{3}$　　D．4

9．直线 $x+y+3=0$ 分别与 x 轴、y 轴交于 A、B 两点，点 C 在圆 $x^2+y^2-6x+7=0$ 上，则 ΔABC 的面积的取值范围为（　　）

A．$[6,\ 12]$　　B．$[6\sqrt{2},\ 12\sqrt{2}]$　　C．$[12,\ 20]$　　D．$[12\sqrt{2},\ 20\sqrt{2}]$

10．曲线 C：$x^3+y^3=1$．给出下列结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离不小于 1；

③曲线 C 只经过 2 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）

其中，所有正确结论的序号是（　　）

A．①②　　B．②③　　C．②　　D．③

二、填空题 共5小题，每小题5分，共25分。

11. 圆心为(1，1)且过原点的圆的方程是____________.

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，则直线 AA_1 与 BC_1 所成角的大小为________；直线 AA_1 到平面 BB_1C_1C 的距离为________.

13. 已知点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$．若直线 l：$x+y-m=0$ 上存在点 P 使得 $PM\perp PN$，则实数 m 的取值范围是________.

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，若存在过原点的直线交椭圆于 A、B 两点，且 $AF\perp BF$，则椭圆的离心率的取值范围是________.

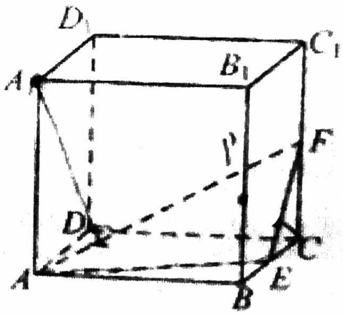
15. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是棱 BC、CC_1 的中点，P 是侧面 BCC_1B_1 内一点(包括边界)，则以下命题中，正确的是________.

①平面 AB_1F 截正方体所得截面为等腰梯形；

②存在点 P，使 $A_1P\perp$ 平面 AEF；

③若 $A_1P\parallel$ 平面 AEF，则线段 A_1P 长度的取值范围是 $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{5}\right]$；

④若点 P 在线段 B_1C 上，则直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



19.（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $P(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)直线 l：$y=x+m$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且 $|PA|=|PB|$，求 m 的值.

20.（本小题 15 分）

如图 1，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB=2$，$CD=4$，$AD=\sqrt{2}$. 取 AB 中点 M，CD 中点 N，将四边形 $AMND$ 沿 MN 翻折，使二面角 $D-MN-C$ 的大小为 θ，得到如图 2 所示的空间几何体.

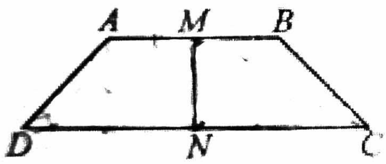


图 1

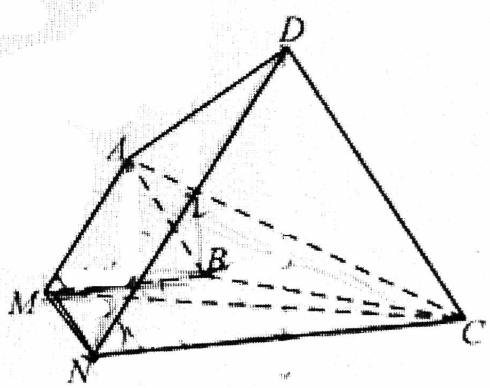


图 2

(Ⅰ)证明：平面 $ABM/\!/$平面 CDN，$S_{\triangle CDN}=4S_{\triangle ABM}$；

(Ⅱ)若 $\theta=\frac{\pi}{4}$，求二面角 $A-MC-B$ 的余弦值.

(Ⅲ)若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，请直接写出点 N 到平面 AMC 的距离的取值范围.

21．（本小题共 15 分）

已知椭圆 C：$x^2+2y^2=2$，右焦点为 F.

（Ⅰ）若点 A，B 在椭圆 C 上，满足 $OA\perp OB$，且直线 AB 与 x 轴垂直，求直线 AB 的方程；

（Ⅱ）过点 F 的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，交直线 $x=2$ 于点 D，设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{MF}$，$\overrightarrow{DN}=\mu\overrightarrow{NF}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值.

（Ⅲ）记椭圆的上、下顶点分别为 P、Q，过点 $(0,2)$ 的直线与椭圆交于 E、H 两点，证明：直线 PH 与 QE 的交点在定直线上，并求出该定直线的方程.