



## 数 学

## 第一部分 (选择题共 40 分)

一、选择题: 共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中只有一个符合题目要求.

1. 已知集合  $A = \{x | x - 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | y = \sqrt{x}\}$ , 则集合  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $[0, 2]$       B.  $(0, 2]$       C.  $(-\infty, 2]$       D.  $[2, +\infty)$

2. 下列函数中, 既是奇函数又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是 ( )

- A.  $y = \frac{1}{x}$       B.  $y = -e^{-x}$       C.  $y = \log_{\lambda}|x|$       D.  $y = x - \frac{1}{x}$

3. 下列命题为真命题的是 ( )

- A. 若  $a > b$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$       B. 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$   
 C. 若  $\frac{b}{a} < 1$ , 则  $b < a$       D. 若  $a > b$ , 则  $a + c > b + c$

4. 若  $a \in (0, 1)$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $a^{-1} > a^{-2}$       B.  $\log_a 3 < \log_a 4$       C.  $2^a < 3^a$       D.  $a < \ln a$

5. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $|a| \geq 1$ ”是“ $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件      C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数  $f(x) = \log_2 x - x + 1$ , 则不等式  $f(x) < 0$  的解集是 ( )

- A.  $(0, 1)$       B.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$       C.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$       D.  $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

7. 已知  $x^3 - y^3 < 2^{-x} - 2^{-y}$ , 则下列结论中正确的是 ( )

- A.  $\ln \frac{y}{x} > 0$       B.  $\ln(y - x + 1) > 0$       C.  $\ln|y + x| > 0$       D.  $\ln|y - x| > 0$

8. 血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数. 人体的血氧饱和度正常范围是  $95\% \sim 100\%$ .

当血氧饱和度低于  $90\%$  时, 需要吸氧治疗. 在环境模拟实验室的某段时间内, 可以用指数

模型:  $S(t) = S_0 e^{Kt}$  描述血氧饱和度  $S(t)$  随给氧时间  $t$  (单位: 时) 的变化规律. 其中  $S_0$  为

初始血氧饱和度,  $K$  为参数. 已知  $S_0 = 60\%$ , 给氧 1 小时后, 血氧饱和度为  $80\%$ . 若使得

血氧饱和度达到  $90\%$ , 则至少还需要给氧时间 (单位: 时) 为 ( ) (精确到 0.1, 参考数



据:  $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$ )

- A. 1.5                      B. 0.7                      C. 0.5                      D. 0.3

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} + a, & x \geq 2 \\ |a^x - 2|, & x < 2 \end{cases}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 若存在实数  $a$  使得函数  $y = f(x) - x$  有三

零点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $0 < a < 1$               B.  $a > 1$               C.  $\frac{1}{2} < a < 1$               D.  $1 < a < 2$

10. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 定义集合  $M = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, x_0), f(x) > f(x_0)\}$ , 在使得  $M = [-1, 1]$  的所有  $f(x)$  中, 下列成立的是 ( )

- A. 存在  $f(x)$ , 使得  $f(x)$  是偶函数                      B. 存在  $f(x)$ , 使得  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减  
C. 存在  $f(x)$ , 使得  $f(x)$  在  $x = -1$  处取极大值              D. 存在  $f(x)$ , 使得  $f(x)$  的最小值是  $f(2)$

第二部分 (非选择题共 110 分)

二、填空题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数  $f(x) = \ln \frac{1}{x-2} + \sqrt{4x-x^2}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $xy = 1$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

13. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x) = \log_{0.5}(x+1)$ , 若  $f(2m-1) + f(3) > 0$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = ax^3 - 2x^2 + 1$  在区间  $(0, 1)$  上存在增区间, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > a \\ \log_2(|x| + 1), & x \leq a \end{cases}$ , 给出下列四个结论:

- ① 对任意实数  $a$ , 函数  $f(x)$  总存在零点;  
② 存在实数  $a$ , 使得函数  $f(x)$  恒大于 0;  
③ 对任意实数  $a$ , 函数  $f(x)$  一定存在最小值;  
④ 存在实数  $a$ , 使得函数  $f(x)$  在  $(-\infty, a)$  上始终单调递减.

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.



三、解答题：共6个小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题满分13分)

已知  $p: x \in A$ , 且  $A = \{x | a-1 < x < a+1\}$ ;  $q: x \in B$ , 且  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$ .

(I) 是否存在实数  $a$ , 使得  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{R}$ , 若存在求出实数  $a$  的值, 若不存在, 说明理由;

(II) 若  $p$  是  $q$  的充分条件, 求实数  $a$  的取值范围.

17. (本小题满分14分)

对下列式子求值:

$$(I) 27^{\frac{2}{3}} \times 3^{1-\log_3 2} \times (\sqrt{3}+1)^0 \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$(II) \log_2 16 + \log_5 35 - \log_5 14 - \log_5 \frac{1}{50}$$

18. (本小题满分13分)

《中华人民共和国乡村振兴促进法》中指出：全面实施乡村振兴战略，开展促进乡村产业振兴、人才振兴、文化振兴、生态振兴、组织振兴，推进城乡融合发展。为深入践行习近平总书记提出“绿水青山就是金山银山”的理念，围绕“产业发展生态化，生态建设产业化”思路。某乡镇为全力打造成“生态特色小镇”，调研发现：某种农作物的单株产量  $t$  (单位：

$$\text{kg}) \text{ 与肥料费用 } x \text{ (单位：元) 满足如下关系： } m(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x^2 + 40), & 0 \leq x \leq 3, \\ 18 - \frac{144}{5x}, & 3 < x \leq 10. \end{cases}$$

其他总成本为  $3x$  (单位：元)，已知这种农作物的市场售价为每  $\text{kg}$  5 元，且供不应求，记该单株农作物获得的利润为  $f(x)$  (单位：元)。

(I) 求  $f(x)$  的函数关系式；

(II) 当投入的肥料费用为多少元时，该农作物单株获得的利润最大？最大利润是多少元？



19. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - ax^2 + 2$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(III) 若  $a > 0$ , 设函数  $g(x) = |f(x)|$ ,  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值为 2, 求  $a$  的取值范围.

20. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的极值;

(II) 若不等式  $e^x f(x) + a \ln x \geq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(III) 已知直线  $l$  是曲线  $y = f(x)$  在点  $(t, f(t))$  处的切线. 求证: 当  $t > 1$  时, 直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相交于点  $(s, f(s))$ , 其中  $s < t$ .

21. (本小题满分 15 分)

给定正整数  $n (n \geq 3)$ , 集合  $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . 若存在集合  $A, B, C$ , 同时满足下列三个条件:

①  $U_n = A \cup B \cup C$ ,  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$ ;

② 集合  $A$  中的元素都为奇数, 集合  $B$  中的元素都为偶数, 所有能被 3 整除的数都在集合  $C$  中 (集合  $C$  中还可以包含其它数);

③ 集合  $A, B, C$  中各元素之和分别为  $S_A, S_B, S_C$ , 有  $S_A = S_B = S_C$ ;

则称集合  $U_n$  为可分集合.

(I) 已知  $U_n$  为可分集合, 写出相应的一组满足条件的集合  $A, B, C$ ;

(II) 当  $n = 2025$  时,  $U_n$  是不是可分集合? 判断并说明理由;

(III) 已知  $n$  为偶数, 求证: “ $\frac{n+4}{12}$  是整数” 是 “ $U_n$  为可分集合” 的必要不充分条件.