# 北京交通大学附属中学 2025 届高三数学 9 月阶段诊断性练习

命题人　贺善菊　　　　　审核人　李剑

一、选择题（四个选项中只有一个答案正确）$4\times10=40$

1．设复数 $z=3-i$，则复数 $i\cdot z$ 在复平面内对应的点的坐标是(　　)

A．$(1,3)$　　　　B．$(-1,3)$

C．$(3,1)$　　　　D．$(3,-1)$

2．已知集合 $A=\{x\mid y=\log_2(x+1)\}$，$B=\{x\in N\mid \frac{2+x}{x-3}\leqslant0\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$\{0，1，2\}$　　　　B．$(-1,3)$

C．$\{2，3\}$　　　　D．$\{1，2\}$

3． 已知定义域为 $I$ 的奇函数 $f(x)$，$\exists x_0\in I$，使 $f(x_0)<0$，则下列函数中符合上述条件的是(　　)

A．$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$　　　　B．$f(x)=\log_2|x|$

C．$f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$　　　　D．$f(x)=1+\sin x$

4．记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和．若 $a_6+a_7=24$，$S_8=48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为(　　)

A．1　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．8

5．若直线 $y=2x$ 是曲线 $f(x)=x(e^{2x}-a)$ 的切线，则 $a=$（　　）

A．$-$e　　　　C．1　　　　D．e

6．设 $a>0$，$b>0$，则"$a^2+b^2\geqslant1$"是"$a+b\geqslant ab+1$"的(　　)

A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

7．已知函数是定义在 $R$ 上的偶函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 单调递减，若 $a\in R$，且满足 $f(\log_3 a)+f(\log_{\frac{1}{3}} a)\leqslant2f(2)$，则 $a$ 的取值范围是(　　)

A．$[\frac{1}{9}，9]$　　　　B．$(-\infty，\frac{1}{9}]$

C．$[\frac{1}{2}，2]$　　　　D．$(0，\frac{1}{9}]\bigcup[9，+\infty)$

8．$f(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，$f(x+1)$ 是奇函数，当 $x\in[0，1]$ 时，$f(x)=2x^2-m$，则 $f(\frac{11}{2})=$（　）

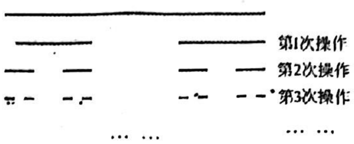
A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　C．$\frac{3}{2}$　　　　D．$-\frac{3}{2}$

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$若$g(x)=f(x)-ax$有四个不同的零点，则$a$的取值范围为(　　)

A.$\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$　　　　B.$\left[\frac{1}{e},\ 1\right)$

C.$[1,\ e)$　　　　D.$[e,\ +\infty)$

10．集合论是德国数学家康托尔于十九世纪末创立的，希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人产物，在纯粹理性范畴中人类活动的最美表现之一”．如图，取一条长度为1的线段，将它三等分，去掉中间一段，留下的两段分割三等分，各去掉中间一段，留下更短的四段，……，将这样操作一直继续下去，直至无穷．由于在不断分割舍弃过程中，所形成的线段的数目越来越多，长度越来越小，在极限情况下，得到一个离散的点集，称为康托尔三分集．若在前$n$次操作中共去掉的线段长度之和不小于$\frac{29}{30}$，则$n$的最小值为(　　)




（参考数据：$lg2=0.3010$，$lg3=0.4771$）

A．9　　　　B．8　　　　C．7　　　　D．6

二、填空题($5\times 5=25$)

11．在$(x-\frac{a}{x})^6$的展开式中，$x^4$的系数为12，则$a$的值为__________；

12．在$\Delta ABC$中，$M$是$BC$的中点，$AM=4$，点$P$在$AM$上，且满足$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的值为_____．

13．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x+\frac{1}{2}$，若将其图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度后所得的图象关于原点对称，则$\varphi$的最小值为______．

14．设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geq a,\\ |x-3-a|+3a, & x<a,\end{cases}$，若函数$f(x)$存在最小值，则$a$的一个取值为_____；$a$的最大值为_____．

15．已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$a_1=2$，$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$满足$a_nS_n=a_{n+1}^2+a_{n+1}\cdot S_n$($n=1,2,3,\cdots$)．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第2项小于1；　　　　②$\{a_n\cdot S_n\}$为常数列；

③$\{a_n\}$为递增数列；　　　　④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项．

其中所有正确结论的序号是____________．

三、解答题

16．(13 分)设$\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，且$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$．

(1)求角$A$的大小；

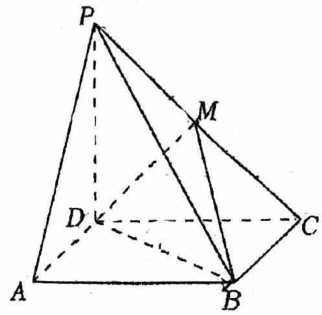
(2)再从以下三组条件中选择一组条件作为已知条件，使三角形存在且唯一确定，并求$\triangle ABC$的面积.

第①组条件：$a=\sqrt{19}$，$c=5$；

第②组条件：$\cos C=\dfrac{1}{3}$，$c=4\sqrt{2}$；

第③组条件：$AB$边上的高$h=\sqrt{3}$，$a=3$．

17．(14 分) 如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$底面$ABCD$，底面$ABCD$是矩形，$M$是线段$PC$的中点．已知$PD=CD=2$，$AD=1$．




（Ⅰ）求证：$PA//$平面$BDM$；

（Ⅱ）求二面角$M-BD-C$的余弦值；

（Ⅲ）直线$BD$上是否存在点$N$，使得$MN$与$PA$垂直？若存在，求$MN$的长；若不存在，请说明理由．

18．(14 分) 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如表：

| 汽车型号 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 回访客户（人数） | 250 | 100 | 200 | 700 | 350 |
| 满意率 | 0.5 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | 0.2 |

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值．假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等．

（Ⅰ）从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

（Ⅱ）若以样本的频率估计概率，从Ⅰ型号和Ⅴ型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为$\xi$，求$\xi$的分布列和期望；

（III）用“$\eta_1=1$”，“$\eta_2=1$”，“$\eta_3=1$”，“$\eta_4=1$”，“$\eta_5=1$”分别表示Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ型号汽车让客户满意，“$\eta_1=0$”，“$\eta_2=0$”，“$\eta_3=0$”，“$\eta_4=0$”，“$\eta_5=0$”分别表示不满意．写出方差$D\eta_1$，$D\eta_2$，$D\eta_3$，$D\eta_4$，$D\eta_5$的大小关系．

19．(15分) 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为，$F_1$，$F_2$，若$F_2$到过椭圆左焦点、斜率为$\sqrt{3}$的直线的距离为3，连接椭圆的四个顶点得到的四边形面积为4.

$(I)$求椭圆$C$的方程；

$(II)$设椭圆$C$的左、右顶点分别为$A$、$B$，过点$M(1,0)$的直线$l$与椭圆$C$相交于$P$、$Q$两点，证明：直线$AP$、$BQ$的交点在垂直于$x$轴的定直线上．

20．(15分) 已知函数$f(x)=lnx-\dfrac{1}{2}a(x-1)(a\in R)$．

（Ⅰ）若$a=-2$，求曲线$y=f(x)$在点(1，$f$（1）)处的切线方程；

（Ⅱ）若不等式$f(x)<0$对任意$x\in(1,+\infty)$恒成立．

（ⅰ）求实数$a$的取值范围；

（ⅱ）试比较$e^{a-2}$与$a^{e-2}$的大小，并给出证明($e$为自然对数的底数，$e=2.71828$)．

21．(14分) 已知无穷数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足：$x_{n+1}=|y_n|-|z_n|$，$y_{n+1}=|z_n|-|x_n|$，$z_{n+1}=|x_n|-|y_n|$，$n\in N^*$．

记$u_n=max\{|x_n|，|y_n|，|z_n|\}$($max\{x，y，z\}$表示3个实数$x$，$y$，$z$中的最大值)．

（Ⅰ）若$x_1=2$，$y_1=3$，$z_1=4$，求$u_1$，$u_2$，$u_3$；

（Ⅱ）若$x_1=2$，$y_1=3$，$u_2=u_1$，求$z_1$；

(Ⅲ) 设$x_1$，$y_1$，$z_1$是有理数，数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$中是否一定存在无穷个0？请说明理由．