2023 北京十一中高二（上）期中

数　　学

一、选择题（共 12 小题；共 48 分）

1. 直线 $x=0$ 的倾斜角为（　）

A. 0°　　B. 90°　　C. 180°　　D. 不存在

2. 已知空间向量 $\vec{m}=(3,1,3),\vec{n}=(-1,\lambda,-1)$，且 $\vec{m}//\vec{n}$，则实数 $\lambda=$（　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 6

3. 直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $2x-3y-1=0$ 垂直，则 a 的值为

A. -3　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. 2　　D. 3

4. 点 A(2，－3)关于点 B(－1, 0)的对称点 A′ 的坐标是(　　)

A. (5，－6)　　B. (－4, 3)　　C. (3，－3)　　D. $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 的一个焦点为（2, 0）， 则这个椭圆的方程是（　）

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C. $x^2+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

6. 已知直线 l_1 经过 $A(-3,4)$，$B(-8,-1)$ 两点，直线 l_2 的倾斜角为 135°，那么 l_1 与 l_2

A. 垂直　　B. 平行　　C. 重合　　D. 相交但不垂直

7. 圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 $x+y+1=0$ 的距离为（　）

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 圆 $C_1:x^2+y^2+2x=0$，圆 $C_2:x^2+y^2+4y=0$，则两圆的位置关系是（　）

A. 内含　　B. 相交　　C. 外切　　D. 外离

9. 平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},0)$，则 y 轴与平面 α 所成的角的大小为（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

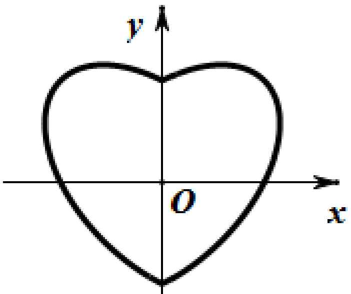
10. 已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则 m 的最大值为

A. 7　　　　B. 6　　　　C. 5　　　　D. 4

11. 已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上、下顶点为 A,B，过点 $P(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 M 相交于两个不同的点 C,D（C 在线段 PD 之间），则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的取值范围为（　）

A. $(-1,16)$　　　　B. $[-1,16]$　　　　C. $\left(-1,\dfrac{13}{4}\right)$　　　　D. $\left[-1,\dfrac{13}{4}\right)$

12. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）.给出下列三个结论：



①曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；

③曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中，所有正确结论的序号是

A. ①　　　　B. ②　　　　C. ①②　　　　D. ①②③

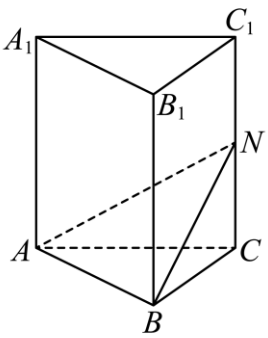
二、填空题（共 6 小题；共 30 分）

13. 直线 l：$y=x$ 与圆 $x^2+y^2-2x-6y=0$ 相交 A 、 B 两点，则 $|AB|=$ ______ .

14. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，则双曲线 C 的焦距为________.

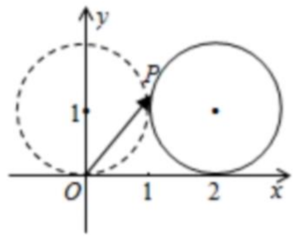
15. 已知点 F_1,F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点，点 P 在此椭圆上，则椭圆离心率为_________，$\triangle PF_1F_2$ 的周长为_________.

16. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，各棱长均为 4，N 是 CC_1 的中点.则点 C_1 到平面 ABN 的距离为___________.



17. 已知l_1、l_2是分别经过$A(1,1)$，$B(0,-1)$两点的两条平行直线，当l_1、l_2间的距离最大时，直线l_1的方程为______.

18. 如图，在平面直角坐标系xOy中，一单位圆的圆心的初始位置在$(0,1)$，此时圆上一点P的位置在$(0,0)$，圆在x轴上沿正向滚动.当圆滚动到圆心位于$(2,1)$时，P的坐标为________.



三、解答题（共5小题：共72分）

19. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c．已知$b=5,c=6,\cos A=\dfrac{4}{5}$.

（1）求a的值；

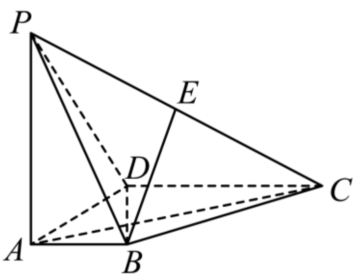
（2）求$\sin B$的值及$\triangle ABC$的面积.

20. 已知直线$l:x-y+1=0$和圆$C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

（1）判断直线l与圆C的位置关系；若相交，求直线l被圆C截得的弦长；

（2）求过点$(4,-1)$且与圆C相切的直线方程.

21. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AD\perp AB$，$AB\,/\!/\,DC$，$AD=DC=AP=2$，$AB=1$，点E为棱PC的中点.



（1）证明：$BE\perp PD$；

（2）若F为棱PC上一点，满足$BF\perp AC$，求平面FAB与平面ABD所成角的余弦值.

22. 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，短轴长为2.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设O为坐标原点，F为椭圆C的右焦点，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$.
求证：$\angle OMA=\angle OMB$.

23. 对于三维向量$\overrightarrow{a_k}=(x_k,y_k,z_k)(x_k,y_k,z_k\in\mathrm{N},k=0,1,2,\cdots)$，定义“$F$变换”：$\overrightarrow{a_{k+1}}=F\left(\overrightarrow{a_k}\right)$，其中，

$x_{k+1}=\left|x_k-y_k\right|,y_{k+1}=\left|y_k-z_k\right|,z_{k+1}=\left|z_k-x_k\right|$．记$\left\langle\overrightarrow{a_k}\right\rangle=x_k y_k z_k$，$\left\|\overrightarrow{a_k}\right\|=x_k+y_k+z_k$．

（1）若$\overrightarrow{a_0}=(3,1,2)$，求$\left\langle\overrightarrow{a_2}\right\rangle$及$\left\|\overrightarrow{a_2}\right\|$；

（2）证明：对于任意$\overrightarrow{a_0}$，经过若干次F变换后，必存在$K\in\mathrm{N}^*$，使$\left\langle\overrightarrow{a_K}\right\rangle=0$；

（3）已知$\overrightarrow{a_1}=(p,2,q)(q\geq p),\left\|\overrightarrow{a_1}\right\|=2024$，将$\overrightarrow{a_1}$再经过$m$次$F$变换后，$\left\|\overrightarrow{a_m}\right\|$最小，求$m$的最小值．

参考答案

一、选择题（共 12 小题；共 48 分）

1. 【答案】B

【分析】根据直线与坐标轴垂直可得倾斜角.

【详解】因为直线 $x=0$ 与 x 轴垂直，

所以直线 $x=0$ 的倾斜角为 $90°$.

故选：B

2. 【答案】A

【分析】由 $\vec{m}//\vec{n}$，得到 $\vec{m}=t\vec{n}$，列出方程组，即可求解.

【详解】由题意，空间向量 $\vec{m}=(3,1,3),\vec{n}=(-1,\lambda,-1)$，

因为 $\vec{m}//\vec{n}$，可得 $\vec{m}=t\vec{n}$，即 $(3,1,3)=t(-1,\lambda,-1)$，可得 $\begin{cases}3=-t\\1=\lambda t\end{cases}$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$.

故选：A

3. 【答案】D

【详解】

【分析】分析：利用两条直线垂直的充要条件，建立方程，即可求出 a 的值.

详解：∵直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $2x-3y-1=0$ 垂直，

∴$2a+2\times(-3)=0$

解得 $a=3$

故选 D.

点睛：本题考查直线的一般式方程与直线的垂直关系的应用，考查计算能力，属于基础题.

4. 【答案】B

【分析】利用中点公式即可求出.

【详解】设点 $A'(x,y)$

则 $\begin{cases}-1=\dfrac{2+x}{2}\\0=\dfrac{-3+y}{2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4\\y=3\end{cases}$

故选 B

【点睛】求解点关于点对称问题，主要应用的知识点是中点公式，但在代入数值是容易出错，必修要对号入座.

5. 【答案】D

【分析】根据 $a^2=b^2+c^2$ 即可求解.

【详解】椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 的一个焦点为（2, 0），

则椭圆的焦点在 x 轴上，且 $c=2$，

因为 $b^2=2$，

所以 $a^2=b^2+c^2=2+4=6$，

所以椭圆的方程是 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

故选：D

6. 【答案】A

【分析】

根据两点求出直线 l_1 的斜率，根据倾斜角求出直线 l_2 的斜率；可知斜率乘积为 -1，从而得到垂直关系.

【详解】$\because$ 直线 l_1 经过 $A\left(-3,4\right)$，$B\left(-8,-1\right)$ 两点　　$\therefore$ 直线 l_1 的斜率：$k_1=\frac{4+1}{-3+8}=1$

$\because$ 直线 l_2 的倾斜角为 135°　　$\therefore$ 直线 l_2 的斜率：$k_2=\tan 135^\circ=-1$

$\therefore k_1\cdot k_2=-1$　　$\therefore l_1\perp l_2$

本题正确选项：A

【点睛】本题考查直线位置关系的判定，关键是利用两点连线斜率公式和倾斜角求出两条直线的斜率，根据斜率关系求得位置关系.

7. 【答案】B

【分析】

由圆的方程得出圆心坐标，利用点到直线的距离公式得出答案.

【详解】圆 $\left(x-1\right)^2+y^2=2$ 的圆心坐标为 $(1,0)$

则圆心 $(1,0)$ 到直线 $x+y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

故选：B

【点睛】本题主要考查了点到直线的距离公式的应用，属于中档题.

8. 【答案】B

【分析】求得两圆的圆心与半径，结合圆与圆的位置关系的判定方法，即可求解.

【详解】由题意，圆 $C_1: x^2+y^2+2x=0$，圆 $C_2: x^2+y^2+4y=0$，

可得 $C_1(-1,0),C_2(0,-2)$，且 $r_1=1,r_2=2$，

则 $|C_1C_2|=\sqrt{5}$，可得 $2-1<\sqrt{5}<2+1$，即 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$，

所以两圆相交.

故选：B.

9. 【答案】B

【分析】

取 y 轴上的单位向量 $\vec{j}=(0,1,0)$，则 y 轴与平面 α 所成的角的大小，由公式 $\sin\theta=|\cos<\vec{j},\vec{n}>|$ 可求解.

【详解】解：设 y 轴与平面 α 所成的角的大小为 θ，

$\because$ 在 y 轴上的单位向量 $\vec{j}=(0,1,0)$，

平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},0)$，

$\therefore \sin\theta=|\cos<\vec{j},\vec{n}>|=\left|\dfrac{-\sqrt{3}}{1\times\sqrt{4}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$.

故选：B.

【点睛】本题考查用向量方法求线面的夹角，属于基础题.

10. 【答案】B

【详解】由题意知，点 P 在以原点（0，0）为圆心，以 m 为半径的圆上，又因为点 P 在已知圆上，所以只要两圆有交点即可，所以 $m-1=5$，故选 B.

考点：本小题主要考查两圆的位置关系，考查数形结合思想，考查分析问题与解决问题的能力.

11. 【答案】D

【分析】由题意画出图形，分直线的斜率不存在和存在两种情况求解，当直线斜率不存在时，求得 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-1$，当直线斜率存在时，设出直线方程，和椭圆方程联立，由判别式大于 0 求得 k 的范围，再结合根与系数的关系写出数量积，由 k 得范围求得 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的范围.

【详解】当直线斜率不存在时，直线方程为 $x=0$，$C(0,1)$，$D(0,-1)$，

此时 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-1$；

当直线斜率存在时，设斜率为 $k(k\neq 0)$，设 $C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$，

则直线方程为 $y=kx+2$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$，

$\Delta=(16k)^2-48(1+4k^2)=64k^2-48>0$，得 $k^2>\dfrac{3}{4}$.

$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{12}{1+4k^2}$，

$\therefore y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=k^2\cdot\dfrac{12}{1+4k^2}+2k\cdot(-\dfrac{16k}{1+4k^2})+4=\dfrac{4(1-k^2)}{1+4k^2}$.

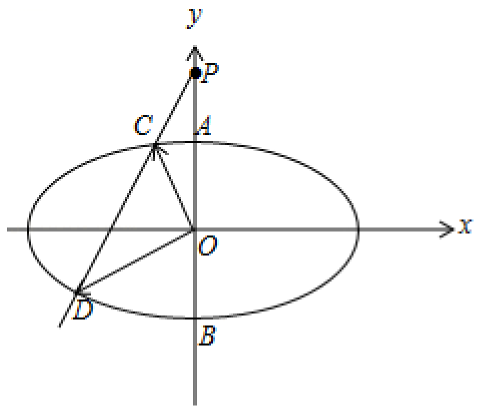
$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{12}{1+4k^2}+\dfrac{4-4k^2}{1+4k^2}=\dfrac{16-4k^2}{1+4k^2}=-\dfrac{1+4k^2-17}{1+4k^2}=-1+\dfrac{17}{1+4k^2}$.

$\because k^2>\dfrac{3}{4}$, $\therefore 1+4k^2>4$, $0<\dfrac{17}{1+4k^2}<\dfrac{17}{4}$,

则 $-1<\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}<\dfrac{13}{4}$,

综上，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的取值范围是 $[-1,\dfrac{13}{4})$.

故选：D.



12. 【答案】C

【分析】将所给方程进行等价变形确定 x 的范围可得整点坐标和个数，结合均值不等式可得曲线上的点到坐标原点距离的最值和范围，利用图形的对称性和整点的坐标可确定图形面积的范围.

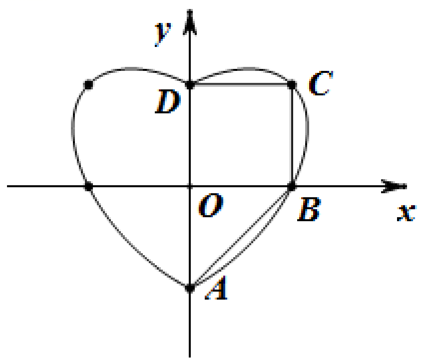
【详解】由 $x^2+y^2=1+|x|y$ 得，$y^2-|x|y=1-x^2$，$\left(y-\dfrac{|x|}{2}\right)^2=1-\dfrac{3x^2}{4},1-\dfrac{3x^2}{4}\geqslant 0,x^2\leqslant\dfrac{4}{3}$，

所以 x 可为的整数有 0, −1, 1, 从而曲线 $C:x^2+y^2=1+|x|y$ 恰好经过 (0, 1), (0, −1), (1, 0), (1, 1), (−1, 0), (−1, 1) 六个整点, 结论①正确.

由 $x^2+y^2=1+|x|y$ 得，$x^2+y^2\leqslant 1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，解得 $x^2+y^2\leq 2$，所以曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$. 结论②正确.

如图所示, 易知 $A(0,-1),B(1,0),C(1,1,),D(0,1)$,

四边形 $ABCD$ 的面积 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\times1\times1+1\times1=\dfrac{3}{2}$，很明显 “心形” 区域的面积大于 $2S_{ABCD}$，即 “心形” 区域的面积大于 3, 说法③错误.



故选 C.

【点睛】本题考查曲线与方程、曲线的几何性质，基本不等式及其应用，属于难题，注重基础知识、基本运算能力及分析问题解决问题的能力考查，渗透“美育思想”．

二、填空题（共 6 小题；共 30 分）

13. 【答案】$4\sqrt{2}$

【分析】根据给定条件，联立方程求出点 A,B 的坐标，再利用两点间距离公式计算作答.

【详解】由 $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2-2x-6y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$，不妨令 $A(0,0),B(4,4)$，

所以 $|AB|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

故答案为：$4\sqrt{2}$

14. 【答案】4

【分析】根据双曲线的标准方程求出 a，b，c 即可得解.

【详解】由双曲线方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$，可得 $a^2=2$，$b^2=2$，

$\therefore c^2=a^2+b^2=4$，$\therefore c=2$，故焦距为 4.

故答案为：4.

15. 【答案】 ①. $\dfrac{4}{5}$##0.8 ②. 18

【分析】利用椭圆的定义与性质计算即可.

【详解】由已知可得 $e=\dfrac{\sqrt{25-9}}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$，

$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2\sqrt{25}+2\sqrt{25-9}=18$.

故答案为：$\dfrac{4}{5}$；18

16. 【答案】$\sqrt{3}$

【分析】构建空间直角坐标系，写出相关点坐标，并求出面 ABN 的一个法向量、$\overrightarrow{C_1N}$，利用点面距离的向量求法求 C_1 到平面 ABN 的距离.

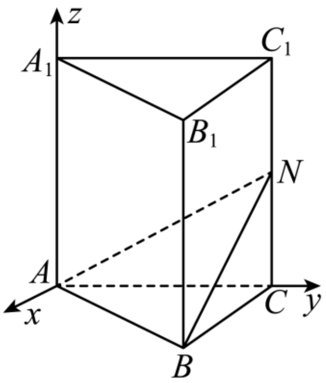
【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B\left(2\sqrt{3},2,0\right)$，$C(0,4,0)$，$C_1(0,4,4)$.

由 N 是 CC_1 的中点，则 $N(0,4,2)$.

设平面 ABN 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\sqrt{3}x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=4y+2z=0\end{cases}$，

令 $z=2$，即 $\vec{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,2\right)$，而 $\overrightarrow{C_1N}=(0,0,-2)$，

设点 C_1 到平面 ABN 的距离为 d_2，则 $d_2=\left|\dfrac{\overrightarrow{C_1N}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{-4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\right|=\sqrt{3}$.



故答案为：$\sqrt{3}$

17. 【答案】$x+2y-3=0$

【分析】先判断出当 $l_1\perp AB$ 时 l_1、l_2 间的距离最大，求出 k_{AB}，进而求出 k_1，即可求出直线 l_1 的方程.

【详解】设两平行直线 l_1、l_2 的距离为 d.

因为 l_1、l_2 是分别经过 $A(1,1)$，$B(0,-1)$ 点的两条平行直线，

所以 $d\le|AB|$,当且仅当 $l_1\perp AB$ 时取等号.

因为直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{1+1}{1-0}=2$，所以与直线 AB 垂直的直线 l_1 的斜事为 $k_1=-\dfrac{1}{2}$，

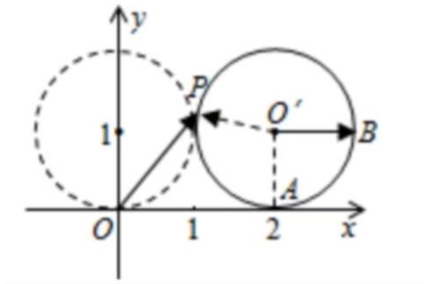
所以 l_1 的方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.

故答案为：$x+2y-3=0$

18. 【答案】$(2-\sin 2,1-\cos 2)$

【分析】根据题意，由圆 O' 的方程可得 $P(2+\cos\theta,1+\sin\theta)$，然后求 θ 代入计算，即可得到结果.

【详解】



设滚动后的圆的圆心为O'，切点为$A(2,0)$，连接$O'P$，

过O'做与x轴正方向平行的射线，交圆O'于$B(3,1)$，

设$\angle BO'P=\theta$，因为圆O'的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

故设$P(2+\cos\theta,1+\sin\theta)$，

又单位圆的圆心的初始位置在$(0,1)$，圆滚动到圆心位于$(2,1)$，

所以$\overset{\frown}{AP}=2,\angle AO'P=2$，可得$\theta=\dfrac{3}{2}\pi-2$，则$\cos\theta=\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\right)=-\sin 2$，

$\sin\theta=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\right)=-\cos 2$，所以$P(2-\sin 2,1-\cos 2)$.

故答案为：$(2-\sin 2,1-\cos 2)$

三、解答题（共 5 小题：共 72 分）

19. 【答案】（1）$a=\sqrt{13}$

（2）$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，9

【分析】（1）由余弦定理求解，

（2）由正弦定理与三角形面积公式求解.

【小问 1 详解】

因为$b=5$，$c=6$，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，由余弦定理知：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+36-2\times5\times6\times\dfrac{4}{5}=13$，则$a=\sqrt{13}$.

【小问 2 详解】

由$\cos A=\dfrac{4}{5}$且A为三角形内角，则$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3}{5}$，

又$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5\times\frac{3}{5}}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\frac{3}{5}=9.$

20. 【答案】（1）相交，截得的弦长为 2.

（2） $x=4$ 或 $4x+3y-13=0$.

【分析】（1）利用点到直线的距离公式以及直线与圆的位置关系求解；

（2）利用直线与圆相切与点到直线的距离公式的关系求解.

【小问 1 详解】

由圆 $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 可得，圆心 $C(1,-2)$,半径 $r=\frac{\sqrt{4+16+16}}{2}=3$，

圆心 $C(1,-2)$ 到直线 $l: x-y+1=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+2+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}<r$，

所以直线 l 与圆 C 相交，

直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$.

【小问 2 详解】

若过点 $(4,-1)$ 的直线斜率不出在，则方程为 $x=4$，

此时圆心 $C(1,-2)$ 到直线 $x=4$ 的距离为 $4-1=3=r$， 满足题意；

若过点 $(4,-1)$ 且与圆 C 相切的直线斜率存在，

则设切线方程为 $y+1=k(x-4)$，即 $kx-y-4k-1=0$，

则圆心到直线 $kx-y-4k-1=0$ 的距离为 $\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，

所以切线方程为 $-\frac{4}{3}x-y+\frac{13}{3}=0$，即 $4x+3y-13=0$，

综上，过点 $(4,-1)$ 且与圆 C 相切的直线方程为 $x=4$ 或 $4x+3y-13=0$.

21. 【答案】（1）证明见解析

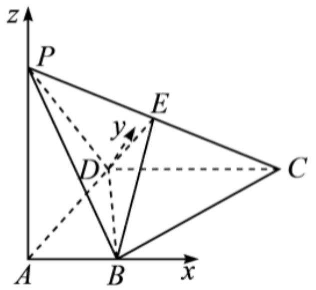
（2） $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】（1）以 A 为坐标原点， AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AZ 为 z 轴建立空间直角坐标系，运用空间向量即可得证，

（2）先根据题意求出 F 点坐标，运用空间向量即可求出面面夹角的余弦值.

【小问 1 详解】

如图所示，以 A 为坐标原点， AB 为 x 轴， AD 为 y 轴， AZ 为 z 轴建立空间直角坐标系，



因为 $AD=DC=AP=2$, $AB=1$, 点 E 为棱 PC 的中点，

所以 $B(1,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $E(1,1,1)$,

因为 $\overrightarrow{BE}=(0,1,1)$, $\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PD}=0$, 即 $\overrightarrow{BE}\perp\overrightarrow{PD}$，

所以 $BE\perp PD$.

【小问 2 详解】

由（1）可得$\because \overrightarrow{BC}=(1,2,0)$， $\overrightarrow{CP}=(-2,-2,2)$， $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$

由 F 为棱 PC 上一点，设 $\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}=(-2\lambda,-2\lambda,2\lambda)(0\le\lambda\le1)$,

故 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=(1-2\lambda,2-2\lambda,2\lambda)(0\le\lambda\le1)$,

由 $BF\perp AC$，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AC}=2(1-2\lambda)+2(2-2\lambda)=0$,

解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$,

即 $\overrightarrow{BF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,

设平面 FBA 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$,

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=0\\ -\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{2}c=0\end{cases}$

令 $c=1$，则 $\vec{n}=(0,-3,1)$,

取平面 ABD 的法向量 $\vec{i}=(0,0,1)$,

设平面 FAB 与平面 ABD 的平面角为 α，由图可知 α 为锐角，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{i}\cdot\vec{n}|}{|\vec{i}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,

故平面 FAB 与平面 ABD 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

22. 【答案】(1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 根据离心率以及短轴长，结合 a,b,c 的关系即可求解，

(2) 联立直线与椭圆方程，由两点斜率公式，结合韦达定理即可化简求解.

【小问 1 详解】

由题意可知：$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c}{a}\\ 2b=2\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，解得 $b=1,a=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

【小问 2 详解】

由于 $F(1,0)$，

当直线无斜率时，此时直线方程为 $x=1$，此时 A,B 关于 x 轴对称，显然满足 $\angle OMA=\angle OMB$，

当直线有些率时，可设直线方程为 $y=k(x-1)$，

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$k_{AM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，$k_{AN}=\frac{y_2}{x_2-2}$，

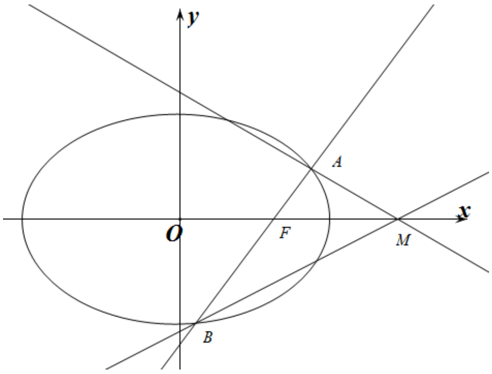
$k_{AM}+k_{AN}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{k(x_1-1)(x_2-2)+k(x_1-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$，

将 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ 代入可得

$k_{AM}+k_{AN}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2k\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-3k\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2k(2k^2-2)-12k^3+4k(1+2k^2)}{1+2k^2(x_1-2)(x_2-2)}=0$，

所以 $\angle OMA=\angle OMB$，

综上可知：$\angle OMA=\angle OMB$



23. 【答案】（1）$\langle\overrightarrow{a_2}\rangle=0,\|\overrightarrow{a_2}\|=2$

（2）证明见解析　（3）505

【分析】（1）根据定义找出$\overrightarrow{a_1}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{a_2}=(1,0,1)$，从而得到$\langle\overrightarrow{a_2}\rangle$，$\|\overrightarrow{a_2}\|$；

（2）利用反证法，假设对$\forall k\in \mathrm{N},\langle\overrightarrow{a_{k+1}}\rangle\neq 0$，然后导出矛盾，命题得证；

（3）先求出$\overrightarrow{a_1}=(1010,2,1012)$，再通过$F$变换，找到$\|\overrightarrow{a_m}\|$最小的时的情况.

【小问 1 详解】

因为$\overrightarrow{a_0}=(3,1,2)$，$\overrightarrow{a_1}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{a_2}=(1,0,1)$，

所以$\langle\overrightarrow{a_2}\rangle=1\times 0\times 1=0,\|\overrightarrow{a_2}\|=1+0+1=2$.

【小问 2 详解】

设$M_k=\max\{x_k,y_k,z_k\}(k=0,1,2\cdots)$，

假设对$\forall k\in \mathrm{N},\langle\overrightarrow{a_{k+1}}\rangle\neq 0$，则$x_{k+1},y_{k+1},z_{k+1}$均不为 0.

所以$M_{k+1}>M_{k+2}$.

即$M_1>M_2>M_3>\cdots$.

因为$M_k\in \mathrm{N}^*(k=1,2,\cdots)$，

所以$M_1\geq M_2+1\geq M_3+2\geq\cdots\geq M_{2+M_1}+1+M_1$.

所以$M_{2+M_1}\leq -1$.

与$M_{2+M_1}>0$矛盾，故假设不正确.

综上，对于任意$\overrightarrow{a_0}$，经过若干次F变换后，必存在$K\in \mathrm{N}^*$，使$\langle\overrightarrow{a_K}\rangle=0$.

【小问 3 详解】

设$\overrightarrow{a_0}=(x_0,y_0,z_0)$，因为$\overrightarrow{a_1}=(p,2,q)(q\geq p)$，

所以有$x_0\leq y_0\leq z_0$或$x_0\geq y_0\geq z_0$.

当 $x_0 \geq y_0 \geq z_0$ 时，可得 $\begin{cases} p = x_0 - y_0, \\ 2 = y_0 - z_0, \\ -q = z_0 - x_0. \end{cases}$ 三式相加得 $q - p = 2$.

又 $\left\| \overrightarrow{a_1} \right\| = 2024$，可得 $p = 1010, q = 1012$.

当 $x_0 \leq y_0 \leq z_0$ 时，也可得 $p = 1010, q = 1012$，于是 $\overrightarrow{a_1} = (1010, 2, 1012)$.

设 $\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量为 $2, t, t+2\left(t \in \mathrm{N}^*\right)$ 这三个数，

当 $t > 2$ 时，$\overrightarrow{a_{k+1}}$ 的三个分量为 $t-2, 2, t$ 这三个数，

所以 $\left\| \overrightarrow{a_{k+1}} \right\| = \left\| \overrightarrow{a_k} \right\| - 4$.

当 $t = 2$ 时，$\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量为 $2, 2, 4$，

则 $\overrightarrow{a_{k+1}}$ 的三个分量为 $0, 2, 2$, $\overrightarrow{a_{k+2}}$ 的三个分量为 $2, 0, 2$，

所以 $\left\| \overrightarrow{a_{k+1}} \right\| = \left\| \overrightarrow{a_{k+2}} \right\| = \cdots = 4$.

所以，由 $\left\| \overrightarrow{a_1} \right\| = 2024$，可得 $\left\| \overrightarrow{a_{505}} \right\| = 8, \left\| \overrightarrow{a_{506}} \right\| = 4$.

因为 $\overrightarrow{a_1} = (1010, 2, 1012)$，所以任意 $\overrightarrow{a_k}$ 的三个分量始终为偶数，

且都有一个分量等于 2.

所以 $\overrightarrow{a_{505}}$ 的三个分量只能是 $2, 2, 4$ 三个数，

$\overrightarrow{a_{506}}$ 的三个分量只能是 $0, 2, 2$ 三个数.

所以当 $m < 505$ 时，$\left\| \overrightarrow{a_{m+1}} \right\| \geq 8$；当 $m \geq 505$ 时，$\left\| \overrightarrow{a_{m+1}} \right\| = 4$.

所以 m 的最小值为 505.

【点睛】关键点睛：新定义问题，常见于选择（填空）的压轴小题中，少数会出现在解答题中，主要考查利用相关的知识点解决概念创新问题的能力，对新定义的理解以及转化，较灵活，属于综合题.