2023 北京东直门中学高二（上）期中

数　学

2023.11

考试时间：120 分钟 总分：150 分

班级______ 姓名______学号 ______

第一部分

一.选择题：（本题有 12 道小题，每小题 4 分，共 48 分）

1. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $sin\ \alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $tan\ \alpha=$(　　)

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_4=5$，则 $a_8=$（　）

A. 9　　B. 11　　C. 13　　D. 15

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列，S_n 是其前 n 项和，$a_2=2$，$a_4=8$，则 $S_7=$（　）

A. 31　　B. 63　　C. 127　　D. 255

4. 已知 α、β 是两个不同的平面，直线 $m\subset\alpha$，下列命题正确的是（　）

A. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $m//\beta$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\beta$

C. 若 $m//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D. 若 $m\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

5. 向量 $\vec{a}=(2,1,x)$，$\vec{b}=(2,y,-1)$，若 $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x+y$ 的值为（　）

A. -1　　B. 1　　C. -4　　D. 4

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2,B=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$ 的面积等于 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 b 等于（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$”的（　）

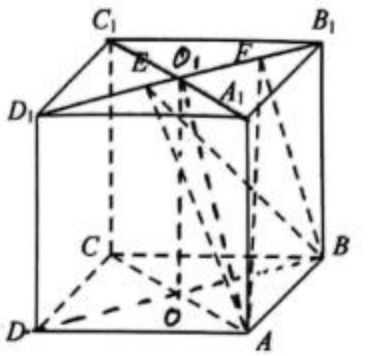
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $P\left(x_0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$（　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\pm\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

9. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F，且 $EF=\frac{1}{2}$，给出下列三个结论：① $AC\perp BE$；② $\triangle AEF$ 的面积大于 $\triangle BEF$ 的面积；③三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值.其中，所有正确结论的个数是（　）



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$，首项 $a_1=-7$，若 a_5,a_6,a_9 成等比数列，记 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n\left(n=1,2,3,\cdots\right)$，则数列 $\{T_n\}$（　）

A. 有最小项，无最大项　　B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，无最小项　　D. 有最大项，有最小项

11. $ISO216$ 是国际标准化组织所定义的纸张尺寸国际标准，该标准定义了 A，B 系列的纸张尺寸．设型号为 $A0,A1,A2,A3,A4,A5,A6$ 的纸张的面积分别是 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$，它们组成一个公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，设型号为 $B1,B2,B3,B4,B5,B6$ 的纸张的面积分别是 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 已知 $b_i^2=a_{i-1}a_i(i=1,2,3,4,5,6)$，则 $\frac{a_4}{b_5}$ 的值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

12.已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　）

A. 当 $a_1=3$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立

B. 当 $a_1=5$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M\leq 6$，使得 $a_n<M$ 恒成立

C. 当 $a_1=7$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，且存在常数 $M>6$，使得 $a_n>M$ 恒成立

D. 当 $a_1=9$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，且存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立

二.填空题：（本题有 6 道小题，每小题 5 分，共 30 分）

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$______；若将 $f\left(x\right)$ 的图象向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $g\left(x\right)$ 的图象，则 $g\left(x\right)$ 的一个对称中心为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $BC=3$， $AC=2\sqrt{6}$， $B=2A$，则 $\cos A=$__________.

15. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1, a_2=-2$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}, n\in \mathbf{N}^*$，则 $a_5=$______；数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 2023 项的和为______.

16. 已知平面 α 和三条不同的直线 m，n，l.给出下列六个论断：① $m\perp\alpha$；② $m//\alpha$；③ $m//l$；④ $n\perp\alpha$；⑤ $n//\alpha$；⑥ $n//l$.以其中两个论断作为条件，使得 $m//n$ 成立.这两个论断可以是______.（填上你认为正确的一组序号）

17. 我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”．已知 9 枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为 9 的数列 $\left\{a_n\right\}$，该数列的前 3 项成等差数列，后 7 项成等比数列，且 $a_1=1, a_5=12, a_9=192$，则 $a_7=$__________；数列 $\left\{a_n\right\}$ 所有项的和为__________.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\varphi\right)\left(0<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图 1 所示，A，B 分别为图象的最高点和最低点，过 A 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 A'，点 C 为该部分图象与 x 轴的交点.将绘有该图象的纸片沿 x 轴折成直二面角，如图 2 所示，给出下列四个结论：

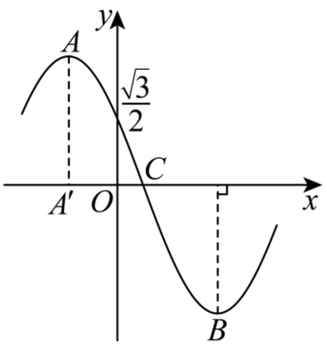


图 1

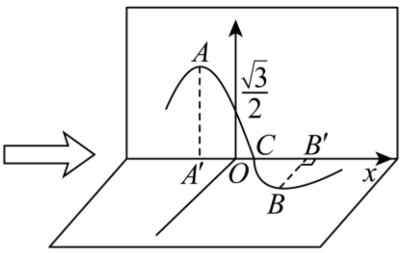


图 2

① $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$；②图 2 中，$\left|AB\right|=\sqrt{10}$；③图 2 中，过线段 AB 的中点且与 AB 垂直的平面与 x 轴交于点 C；④图 2 中，S 是 $\triangle A'BC$ 及其内部的点构成的集合.设集合 $T=\left\{Q\in S\,\middle|\,\left|AQ\right|\le 2\right\}$，则 T 表示的区域的面积大于 $\dfrac{\pi}{8}$.其中所有正确结论的序号是______.

三.解答题：（本题有 6 小题，共 72 分）

19. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，$\left\{b_n\right\}$ 是等比数列，$b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$、$\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20. 已知函数 $f(x)=A\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$.

（1）求 A 和函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，若 $f(x)\le m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

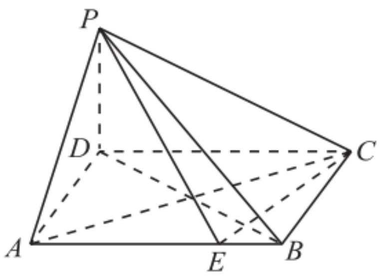
21. 在 $\triangle ABC$ 中，$2a\sin B=\sqrt{2}b$.

（1）求 A;

（2）若 $b=2\sqrt{6}$，从下列三个条件中选出一个条件作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.条件①：$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$；条件②：$a=2$；条件③：$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

注：如果选择了不合适的条件，则第（2）问记 0 分.

22. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD=2,AB=4$，点 E 在线段 AB 上，且 $AE=\frac{3}{4}AB$.

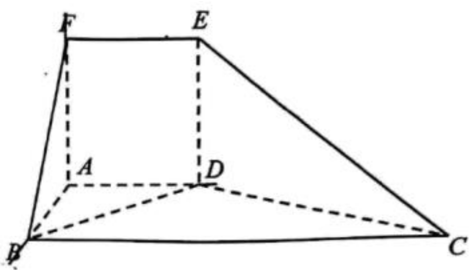


（1）求证：$CE\perp$ 平面 PBD;

（2）求二面角 $P-CE-D$ 的余弦值;

（3）求点 A 到平面 PCE 的距离.

23. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$.四边形 $ADEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD//BC,\angle BAD=90^\circ,AB=AD=1,BC=3$.



（1）求证：$AF\perp CD$；

（2）求直线 BF 与平面 CDE 所成角的正弦值;

（3）线段 BD 上是否存在点 M，使得直线 $CE//$ 平面 AFM？若存在，求 $\frac{BM}{BD}$ 的值；若不存在，请说明理

由.

24. 设λ为正实数，若各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+1}\ge a_n+\lambda$．则称数列$\{a_n\}$为$P(\lambda)$数列.

（1）判断以下两个数列是否为$P(2)$数列：

数列A：3，5，8，13，21；

数列B：$\log_2 5$，π，5，10.

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_1>0$且$b_{n+1}=b_n+\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$，是否存在正实数$\lambda$，使得数列$\{b_n\}$是$P(\lambda)$数列？若存在，求$\lambda$的取值范围；若不存在，说明理由.

（3）若各项均为整数的数列$\{a_n\}$是$P(1)$数列，且$\{a_n\}$的前$m(m\ge 2)$项和$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m$为150，求a_m+m的最小值及取得最小值时a_m的所有可能取值.

参考答案

第一部分

一.选择题：（本题有 12 道小题，每小题 4 分，共 48 分）

1.【答案】B

【详解】由 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\sigma}=-\dfrac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\sigma}{\cos\sigma}=-\dfrac{3}{4}$.

故答案为 B.

2.【答案】C

【分析】利用等差数列的基本量计算可得答案.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $2d=a_4-a_2=4$，

则 $a_8=a_2+6d=1+3\times4=13$

故选：C

3.【答案】C

【分析】根据条件求出数列的首项和公比后再求和即可.

【详解】由题意，设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，则 $\begin{cases}a_1q=2\\a_1q^3=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$，

所以 $S_7=\dfrac{1\times(1-2^7)}{1-2}=127$.

故选：C

4.【答案】D

【分析】根据 $\alpha\perp\beta$ 判断 m 与 β 的位置关系，可判断 AB 选项的正误；由 m 与 β 的位置关系判断 α 与 β 的位置关系，可判断 CD 选项的正误.

【详解】若 $m\subset\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $m//\beta$、m 与 β 相交或 $m\subset\beta$，AB 选项错误；

若 $m\subset\alpha$，$m//\beta$，则 $\alpha//\beta$ 或 α 与 β 相交，C 选项错误；

若 $m\subset\alpha$，$m\perp\beta$，由面面垂直的判定定理可知 $\alpha\perp\beta$，D 选项正确.

故选：D.

5.【答案】C

【分析】根据向量模的公式可求出 x 的值，根据 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 可求出 y 的值，从而可求出 $x+y$ 的值.

【详解】因为向量 $\vec{a}=(2,1,x)$，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，所以 $\sqrt{4+1+x^2}=\sqrt{5}$，解得 $x=0$，

所以向量 $\vec{a}=(2,1,0)$，

因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2+y+0=0$，所以 $y=-4$，

所以 $x+y$ 的值为 -4.

故选：C.

6.【答案】C

【分析】由已知利用三角形面积公式可求c，进而利用余弦定理可求b的值.

【详解】解：$\because a=2$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$的面积等于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\times c\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$解得：$c=1$，

$\therefore$由余弦定理可得：$b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{4+1-2\times 2\times 1\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

故选：C.

7.【答案】C

【分析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，利用等差数列的通项公式结合充分条件、必要条件的定义判断可得出结论.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq 0$，记$[x]$为不超过x的最大整数.

若$\{a_n\}$为单调递增数列，则$d>0$，

若$a_1\geq 0$，则当$n\geq 2$时，$a_n>a_1\geq 0$；若$a_1<0$，则$a_n=a_1+(n-1)d$，

由$a_n=a_1+(n-1)d>0$可得$n>1-\dfrac{a_1}{d}$，取$N_0=\left[1-\dfrac{a_1}{d}\right]+1$，则当$n>N_0$时，$a_n>0$，

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”$\Rightarrow$“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”；

若存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$，取$k\in\mathrm{N}^*$且$k>N_0$，$a_k>0$，

假设$d<0$，令$a_n=a_k+(n-k)d<0$可得$n>k-\dfrac{a_k}{d}$，且$k-\dfrac{a_k}{d}>k$，

当$n>\left[k-\dfrac{a_k}{d}\right]+1$时，$a_n<0$，与题设矛盾，假设不成立，则$d>0$，即数列$\{a_n\}$是递增数列.

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”$\Leftarrow$“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”.

所以，“$\{a_n\}$是递增数列”是“存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>0$”的充分必要条件.

故选：C.

8.【答案】A

【分析】根据单位圆及三角函数的定义求出$\sin\alpha$，再由二倍角余弦公式求解.

【详解】因为$P\left(x_0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$是角$\alpha$终边与单位圆的交点，

所以$\sin\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

故 $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}$.

故选：A

9.【答案】D

【分析】根据 $AC\perp$ 平面 DBB_1D_1 得到①正确，点 A 到直线 B_1D_1 的距离大于点 B 到直线 B_1D_1 的距离，②正确，计算体积得到③正确，得到答案.

【详解】对①：$BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，故 $AC\perp BB_1$，

又 $AC\perp BD$，$BD\cap BB_1=B$，$BD,BB_1\subset$ 平面 DBB_1D_1，故 $AC\perp$ 平面 DBB_1D_1，

$BE\subset$ 平面 DBB_1D_1，故 $AC\perp BE$，正确；

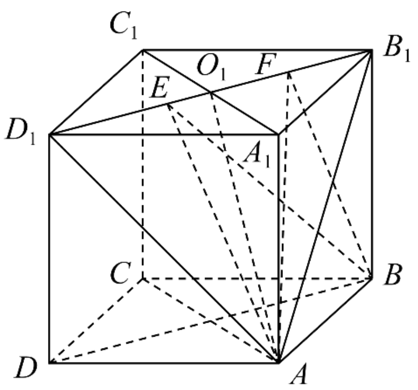
对②：$BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1D_1\perp BB_1$，

故 BB_1 是 $\triangle BEF$ 的高，

O_1 是 B_1D_1 中点，$AD_1=AB_1$，故 $AO_1\perp B_1D_1$，AO_1 是 $\triangle AEF$ 的高，

$AO_1>BB_1$，正确；

对③：$A_1O_1\perp$ 平面 DBB_1D_1，故 $V_{A-BEF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{24}$，正确；



故选：D

10.【答案】A

【分析】根据等比中项性质解得 $a_n=2n-9$，取得数列项的正负，得到答案.

【详解】a_5,a_6,a_9 成等比数列，故 $a_6^2=a_5\cdot a_9$，即 $(-7+5d)^2=(-7+4d)(-7+8d)$，

解得 $d=2$ 或 $d=0$（舍），$a_n=2n-9$，

当 $n\le 4$，$n\in\mathrm{N}^*$ 时，$a_n<0$；当 $n\ge 5$，$n\in\mathrm{N}^*$ 时，$a_n>0$；

a_n 的前 6 项为：$-7,-5,-3,-1,1,3$，

$T_n=a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_n$，故 T_3 最小，没有最大值.

故选：A

11.【答案】C

【分析】利用 a_i 是等比数列以及 $b_i^2=a_{i-1}a_i$，令 $i=5$ 求解即可.

【详解】$\because b_i^2=a_{i-1}a_i$，令 $i=5$，

$\therefore {b_5}^2=a_4a_5$

又$\because a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$ 组成一个公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

$\therefore {b_5}^2=a_4a_5=a_4\cdot a_4\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}{a_4}^2$，

又 $a_4>0,b_5>0$，

$\therefore \frac{a_4}{b_5}=\sqrt{2}$

故选：C.

12.【答案】B

【分析】法 1：利用数列归纳法可判断 ACD 正误，利用递推可判断数列的性质，故可判断 B 的正误.

法 2：构造 $f(x)=\frac{1}{4}(x-6)^3+6-x$，利用导数求得 $f(x)$ 的正负情况，再利用数学归纳法判断得各选项 a_n 所在区间，从而判断 $\{a_n\}$ 的单调性；对于 A，构造 $h(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47\,(x\le 3)$，判断得 $a_{n+1}<a_n-1$，进而取 $m=-[M]+4$ 推得 $a_n>M$ 不恒成立；对于 B，证明 a_n 所在区间同时证得后续结论；对于 C，记 $m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取 $m=[m_0]+1$ 推得 $a_n>M$ 不恒成立；对于 D，构造 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49\,(x\ge 9)$，判断得 $a_{n+1}>a_n+1$，进而取 $m=[M]+1$ 推得 $a_n<M$ 不恒成立.

【详解】法 1：因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6$，故 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3$，

对于 A，若 $a_1=3$，可用数学归纳法证明：$a_n-6\le -3$ 即 $a_n\le 3$，

证明：当 $n=1$ 时，$a_1-6=-3\le -3$，此时不等关系 $a_n\le 3$ 成立；

设当 $n=k$ 时，$a_k-6\le -3$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-54,-\frac{27}{4}\right)$，故 $a_{k+1}-6\le -3$ 成立，

由数学归纳法可得 $a_n\le 3$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\ge\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}>0$，$a_n-6<0$，故 $a_{n+1}-a_n<0$，故 $a_{n+1}<a_n$，

故$\{a_n\}$为减数列，注意 $a_{k+1}-6\le -3<0$

故 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}(a_n-6)^3=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{9}{4}(a_n-6)$，结合 $a_{n+1}-6<0$，

所以 $6-a_{n+1}\ge\frac{9}{4}(6-a_n)$，故 $6-a_{n+1}\ge 3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $a_{n+1}\le 6-3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数 $M\leqslant 0$，使得 $a_n>M$ 恒成立，则 $6-3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}>M$，

故 $\frac{6-M}{3}>\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $n<1+\log_{\frac{9}{4}}\frac{6-M}{3}$，故 $a_n>M$ 恒成立仅对部分 n 成立，

故 A 不成立.

对于 B，若 $a_1=5$, 可用数学归纳法证明：$-1\le a_n-6<0$ 即 $5\le a_n<6$，

证明：当 $n=1$ 时，$-1\le a_1-6=-1\le 0$，此时不等关系 $5\le a_n<6$ 成立；

设当 $n=k$ 时，$5\le a_k<6$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，故 $-1\le a_{k+1}-6<0$ 成立即

由数学归纳法可得 $5\le a_{k+1}<6$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}(a_n-6)^3-(a_n-6)=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]$，

$\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1<0$，$a_n-6<0$，故 $a_{n+1}-a_n>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故$\{a_n\}$为增数列，

若 $M=6$，则 $a_n<6$ 恒成立，故 B 正确.

对于 C，当 $a_1=7$ 时，可用数学归纳法证明：$0<a_n-6\le 1$ 即 $6<a_n\le 7$，

证明：当 $n=1$ 时，$0<a_1-6\le 1$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时，$6<a_k\le 7$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，故 $0<a_{k+1}-6\le 1$ 成立即 $6<a_{k+1}\le 7$

由数学归纳法可得 $6<a_n\le 7$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=(a_n-6)\left[\frac{1}{4}(a_n-6)^2-1\right]<0$，故 $a_{n+1}<a_n$，故$\{a_n\}$为减数列，

又 $a_{n+1}-6=(a_n-6)\times\frac{1}{4}(a_n-6)^2\le\frac{1}{4}(a_n-6)$，结合 $a_{n+1}-6>0$ 可得：$a_{n+1}-6\le(a_1-6)\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以

$a_{n+1}\le 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

若 $a_{n+1}\le 6+\left(\frac{1}{4}\right)^n$，若存在常数 $M>6$，使得 $a_n>M$ 恒成立，

则 $M-6\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 恒成立，故 $n\le\log_{\frac{1}{4}}\left(M-6\right)$，$n$ 的个数有限，矛盾，故 C 错误.

对于 D，当 $a_1=9$ 时， 可用数学归纳法证明：$a_n-6\ge 3$ 即 $a_n\ge 9$，

证明：当 $n=1$ 时，$a_1-6=3\ge 3$，此时不等关系成立；

设当 $n=k$ 时，$a_k\ge 9$ 成立，

则 $a_{k+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3\ge\frac{27}{4}>3$，故 $a_{k+1}\ge 9$ 成立

由数学归纳法可得 $a_n\ge 9$ 成立.

而 $a_{n+1}-a_n=\left(a_n-6\right)\left[\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2-1\right]>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，故 $\left\{a_n\right\}$ 为增数列，

又 $a_{n+1}-6=\left(a_n-6\right)\times\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^2>\frac{9}{4}\left(a_n-6\right)$，结合 $a_n-6>0$ 可得：

$a_{n+1}-6>\left(a_1-6\right)\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，所以 $a_{n+1}\ge 6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

若存在常数 $M>0$，使得 $a_n<M$ 恒成立，则 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，

故 $M>6+3\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$，故 $n<\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{M-6}{3}\right)+1$，这与 n 的个数有限矛盾，故 D 错误.

故选：B.

法 2：因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6-a_n=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-48$，

令 $f\left(x\right)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48$，则 $f'\left(x\right)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $x>6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

令 $f'(x)<0$，得 $6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(6+\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3},6+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减，

令 $f\left(x\right)=0$，则 $\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-48=0$，即 $\frac{1}{4}\left(x-4\right)\left(x-6\right)\left(x-8\right)=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$ 或 $x=8$，

注意到$4<6-\frac{2\sqrt{3}}{3}<5$，$7<6+\frac{2\sqrt{3}}{3}<8$，

所以结合$f\left(x\right)$的单调性可知在$\left(-\infty,4\right)$和$\left(6,8\right)$上$f\left(x\right)<0$，在$\left(4,6\right)$和$\left(8,+\infty\right)$上$f\left(x\right)>0$，

对于A，因为$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6$，则$a_{n+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3$，

当$n=1$时，$a_1=3$，$a_2-6=\frac{1}{4}\left(a_1-6\right)^3<-3$，则$a_2<3$，

假设当$n=k$时，$a_k<3$，

当$n=k+1$时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3<\frac{1}{4}\left(3-6\right)^3<-3$，则$a_{k+1}<3$，

综上：$a_n\le 3$，即$a_n\in\left(-\infty,4\right)$，

因为在$\left(-\infty,4\right)$上$f\left(x\right)<0$，所以$a_{n+1}<a_n$，则$\left\{a_n\right\}$为递减数列，

因为$a_{n+1}-a_n+1=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6-a_n+1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-47$，

令$h\left(x\right)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-47\left(x\le 3\right)$，则$h'\left(x\right)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为$h'\left(x\right)$开口向上，对称轴为$x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以$h'\left(x\right)$在$\left(-\infty,3\right]$上单调递减，故$h'\left(x\right)\ge h'\left(3\right)=\frac{3}{4}\times 3^2-9\times 3+26>0$，

所以$h\left(x\right)$在$\left(-\infty,3\right]$上单调递增，故$h\left(x\right)\le h\left(3\right)=\frac{1}{4}\times 3^3-\frac{9}{2}\times 3^2+26\times 3-47<0$，

故$a_{n+1}-a_n+1<0$，即$a_{n+1}<a_n-1$，

假设存在常数$M\leqslant 0$，使得$a_n>M$恒成立，

取$m=-\left[M\right]+4$，其中$M-1<\left[M\right]\le M$，且$\left[M\right]\in Z$，

因为$a_{n+1}<a_n-1$，所以$a_2<a_1-1,a_3<a_2-1,\cdots,a_{-[M]+4}<a_{-[M]+3}-1$，

上式相加得，$a_{-[M]+4}<a_1-\left(-\left[M\right]+3\right)\le 3+M-3=M$，

则$a_m=a_{[M]+4}<M$，与$a_n>M$恒成立矛盾，故A错误；

对于B，因为$a_1=5$，

当$n=1$时，$a_1=5<6$，$a_2=\frac{1}{4}\left(a_1-6\right)^3+6=\frac{1}{4}\times\left(5-6\right)^3+6<6$，

假设当$n=k$时，$a_k<6$，

当 $n=k+1$ 时，因为 $a_k<6$，所以 $a_k-6<0$，则 $\left(a_k-6\right)^3<0$，

所以 $a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6<6$，

又当 $n=1$ 时，$a_2-5=\frac{1}{4}\left(a_1-6\right)^3+1=\frac{1}{4}\times\left(5-6\right)^3+1>0$，即 $a_2>5$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k\ge 5$，

当 $n=k+1$ 时，因为 $a_k\ge 5$，所以 $a_k-6\ge -1$，则 $\left(a_k-6\right)^3\ge -1$，

所以 $a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6\ge 5$，

综上：$5\le a_n<6$，

因为在 $\left(4,6\right)$ 上 $f\left(x\right)>0$，所以 $a_{n+1}>a_n$，所以 $\left\{a_n\right\}$ 为递增数列，

此时，取 $M=6$，满足题意，故 B 正确；

对于 C，因为 $a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3+6$，则 $a_{n+1}-6=\frac{1}{4}\left(a_n-6\right)^3$，

注意到当 $a_1=7$ 时，$a_2=\frac{1}{4}\left(7-6\right)^3+6=\frac{1}{4}+6$，$a_3=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+6-6\right)^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$，

$$a_4=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{13}+6$$

猜想当 $n\ge 2$ 时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6$，

当 $n=2$ 与 $n=3$ 时，$a_2=\frac{1}{4}+6$ 与 $a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^4+6$ 满足 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6$，

假设当 $n=k$ 时，$a_k=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6$，

当 $n=k+1$ 时，所以 $a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(a_k-6\right)^3+6=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)}+6-6\right]^3+6=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)}+6$，

综上：$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6\left(n\ge 2\right)$，

易知 $3^n-1>0$，则 $0<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}<1$，故 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)}+6\in\left(6,7\right)\left(n\ge 2\right)$，

所以 $a_n\in\left(6,7\right]$，

因为在$(6,8)$上 $f(x)<0$，所以$a_{n+1}<a_n$，则$\{a_n\}$为递减数列，

假设存在常数$M>6$，使得$a_n>M$ 恒成立，

记$m_0=\log_3\left[2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1\right]$，取$m=[m_0]+1$，其中$m_0-1<[m_0]\le m_0, m_0\in \mathrm{N}^*$，

则$3^m>3^{m_0}=2\log_{\frac{1}{4}}(M-6)+1$，

故$\frac{1}{2}(3^m-1)>\log_{\frac{1}{4}}(M-6)$，所以$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}<M-6$，即$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}(3^m-1)}+6<M$，

所以$a_m<M$，故$a_n>M$ 不恒成立，故 C 错误；

对于 D，因为$a_1=9$，

当$n=1$时，$a_2-6=\frac{1}{4}(a_1-6)^3=\frac{27}{4}>3$，则$a_2>9$，

假设当$n=k$时，$a_k\ge 3$，

当$n=k+1$时，$a_{k+1}-6=\frac{1}{4}(a_k-6)^3\ge\frac{1}{4}(9-6)^3>3$，则$a_{k+1}>9$，

综上：$a_n\ge 9$，

因为在$(8,+\infty)$上 $f(x)>0$，所以$a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，

因为$a_{n+1}-a_n-1=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6-a_n-1=\frac{1}{4}a_n^3-\frac{9}{2}a_n^2+26a_n-49$，

令$g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{2}x^2+26x-49(x\ge 9)$，则$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-9x+26$，

因为$g'(x)$开口向上，对称轴为$x=-\frac{-9}{2\times\frac{3}{4}}=6$，

所以$g'(x)$在$[9,+\infty)$上单调递增，故$g'(x)\ge g'(9)=\frac{3}{4}\times 9^2-9\times 9+26>0$，

所以$g(x)\ge g(9)=\frac{1}{4}\times 9^3-\frac{9}{2}\times 9^2+26\times 9-49>0$，

故$a_{n+1}-a_n-1>0$，即$a_{n+1}>a_n+1$，

假设存在常数$M>0$，使得$a_n<M$ 恒成立，

取$m=[M]+1$，其中$M-1<[M]\le M$，且$[M]\in \mathrm{Z}$，

因为$a_{n+1}>a_n+1$，所以$a_2>a_1+1, a_3>a_2+1, \cdots, a_{[M]+1}>a_{[M]}+1$，

上式相加得，$a_{[M]+1}>a_1+[M]>9+M-1>M$，

则 $a_m = a_{[M]+1} > M$ ，与 $a_n < M$ 恒成立矛盾，故 D 错误.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是根据首项给出与通项性质相关的相应的命题，再根据所得命题结合放缩法得到通项所满足的不等式关系，从而可判断数列的上界或下界是否成立.

二.填空题：（本题有 6 道小题，每小题 5 分，共 30 分）

13.【答案】 ①. 1 ②. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$（答案不唯一）

【分析】确定 $f\left(x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，计算得到 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，确定 $g\left(x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，取 $x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathrm{Z}$，计算得到答案.

【详解】$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$；

$g\left(x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，取 $x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathrm{Z}$，即 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

取 $k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$，此时对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$.

故答案为：1；$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

14.【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【分析】由正弦定理和正弦的二倍角公式可得.

【详解】由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AC}{\sin 2A}$，所以 $\frac{3}{\sin A}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15.【答案】 ①. 2 ②. 1

【分析】根据递推关系写出数列的项，可得数列的周期，利用周期求解.

【详解】由 $a_1=1,a_2=-2$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n+2},n\in\mathbf{N}^*$，

可得 $a_3=-3$，$a_4=-1$，$a_5=2$，$a_6=3$，$a_7=1$，$\cdots$，

故从 a_1 开始，每 6 项循环一次，且一个循环内 6 项的和为 0，

$\because 2023=6\times337+1$，即前 2023 项的和为 $337\times0+a_1=1$.

故答案为：2；1

16.【答案】①④（或③⑥）

【分析】

根据空间中直线，平面的位置关系进行判断即可.

【详解】对①④，由线面垂直的性质定理可知，若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$，故可填①④

对①⑤，若$m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则$m\perp n$；

对①⑥，若$m\perp\alpha$，$n//l$，则无法判断m,n的位置关系；

对②④，若$m//\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m\perp n$；

对②⑤，若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则m,n可能相交，平行或异面；

对②⑥，若$m//\alpha$，$n//l$，则无法判断m,n的位置关系；

对③④，若$m//l$，$n\perp\alpha$，则无法判断m,n的位置关系；

对③⑤，若$m//l$，$n//\alpha$，则无法判断m,n的位置关系；

对③⑥，由平行的传递性可知，若$n//l$，$m//l$，则$m//n$，故可填③⑥

故答案为：①④（或③⑥）

【点睛】本题主要考查了判断空间中直线与直线，直线与平面的位置关系，属于中档题.

17.【答案】 ①. 48 ②. 384

【分析】方法一：根据题意结合等差、等比数列的通项公式列式求解d,q，进而可求得结果；方法二：根据等比中项求a_7,a_3，在结合等差、等比数列的求和公式运算求解.

【详解】方法一：设前 3 项的公差为d，后 7 项公比为$q>0$，

则$q^4=\dfrac{a_9}{a_5}=\dfrac{192}{12}=16$，且$q>0$，可得$q=2$，

则$a_3=1+2d=\dfrac{a_5}{q^2}$，即$1+2d=3$，可得$d=1$，

空 1：可得$a_3=3,a_7=a_3q^4=48$，

空 2：$a_1+a_2+\cdots+a_9=1+2+3+3\times2+\cdots+3\times2^6=3+\dfrac{3\left(1-2^7\right)}{1-2}=384$

方法二：空 1：因为$\{a_n\},3\le n\le7$为等比数列，则$a_7^2=a_5a_9=12\times192=48^2$，

且$a_n>0$，所以$a_7=48$；

又因为$a_5^2=a_3a_7$，则$a_3=\dfrac{a_5^2}{a_7}=3$；

空 2：设后 7 项公比为$q>0$，则$q^2=\dfrac{a_5}{a_3}=4$，解得$q=2$，

可得$a_1+a_2+a_3=\dfrac{3\left(a_1+a_3\right)}{2}=6,a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=\dfrac{a_3-a_9q}{1-q}=\dfrac{3-192\times2}{1-2}=381$，所以

$a_1+a_2+\cdots+a_9=6+381-a_3=384$.

故答案为：48；384.

18.【答案】②③

【分析】根据 $f\left(0\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 结合图像判断 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，①错误，根据 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}$ 计算得到②正确，$\left|AC\right|=\left|BC\right|=2$ 得到③正确，区域表示以 A' 为圆心，半径为1，圆心角为 $\angle CA'B=\alpha$ 的扇形，计算 $\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ 得到④错误，得到答案.

【详解】对①：$f\left(0\right)=\sqrt{3}\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$，$0<\varphi<\pi$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，

函数图像由 $y=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ 向左平移 $\dfrac{2\varphi}{\pi}$ 个单位得到，根据图像知 $\dfrac{2\varphi}{\pi}>1$，即 $\varphi>\dfrac{\pi}{2}$，

故 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，错误；

对②：$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，取 $\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{5\pi}{6}=\pi$，$\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$，

在图 1 中得到 $A\left(-\dfrac{2}{3},\sqrt{3}\right)$，$C\left(\dfrac{1}{3},0\right)$，$B\left(\dfrac{4}{3},-\sqrt{3}\right)$，

图 2 中：$AA'\perp A'B'$，平面 $AA'O\perp$ 平面 $BB'O$，平面 $AA'O\cap$ 平面 $BB'O=A'B'$，

故 $AA'\perp$ 平面 $BB'O$，$BB'\subset$ 平面 $BB'O$，故 $AA'\perp BB'$，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'B}\right)^2$

$=\overrightarrow{AA'}^2+\overrightarrow{A'B'}^2+\overrightarrow{B'B}^2=3+3+4=10$，故 $\left|AB\right|=\sqrt{10}$，正确；

对③：$\left|AC\right|=\left|BC\right|=2$，故过线段 AB 的中点且与 AB 垂直的平面与 x 轴交于点 C，正确；

对④：$AA'\perp$ 平面 $BB'O$，$A'Q\subset$ 平面 $BB'O$，故 $AA'\perp A'Q$，

当 $\left|AQ\right|=2$ 时，$\left|AA'\right|=\sqrt{3}$，故 $\left|A'Q\right|=\sqrt{4-3}=1$，

区域表示以 A' 为圆心，半径为1，圆心角为 $\angle CA'B=\alpha$ 的扇形，$S=\dfrac{1}{2}\alpha\times1^2=\dfrac{\alpha}{2}$，

$\tan\alpha=\dfrac{\left|BB'\right|}{\left|A'B'\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$，$\alpha<\dfrac{\pi}{4}$，即 $S<\dfrac{\pi}{8}$，错误；

故答案为：②③.

三.解答题：（本题有 6 小题，共 72 分）

19.【答案】（1）$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$

（2）$S_n=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$

【分析】（1）由 $q=\dfrac{b_3}{b_2}$ 可求得数列 $\{b_n\}$ 的公比，由等比数列通项公式可得 b_n，进而得到 a_1, a_{14}；由 $d=\dfrac{a_{14}-a_1}{13}$ 可求得数列 $\{a_n\}$ 的公差，由等差数列通项公式可得 a_n；

（2）由（1）可得 c_n，采用分组求和法，结合等差、等比数列求和公式可得 S_n.

【小问 1 详解】

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $q=\dfrac{b_3}{b_2}=3$，$\therefore b_n=b_2q^{n-2}=3^{n-1}$；

又 $a_1=b_1=1$，$a_{14}=b_4=27$，设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=\dfrac{a_{14}-a_1}{13}=2$，

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

【小问 2 详解】

由（1）得：$c_n=(2n-1)+3^{n-1}$；

$\therefore S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=(1+3+\cdots+2n-1)+(1+3+\cdots+3^{n-1})$

$=\dfrac{1+2n-1}{2}\cdot n+\dfrac{1-3^n}{1-3}=n^2+\dfrac{3^n-1}{2}$.

20. 【答案】（1）$A=2$；π

（2）$[2,+\infty)$

【分析】（1）解方程 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ 即可求 A，然后把函数 $f(x)$ 降幂，辅助角公式后再求周期.

（2）若 $f(x)\le m$ 恒成立，即求 $f(x)_{\max}\le m$.

【小问 1 详解】

$\because f(x)=A\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=A\sin\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{3}=0$，即 $A\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=0$，$\therefore A=2$

$\therefore f(x)=2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

所以函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问 2 详解】

$\because x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时有最大值，即 $f\left(x\right)_{\max}=2\sin\frac{\pi}{2}=2$.

若 $f(x)\le m$ 恒成立，即 $f(x)_{\max}\le m$，

所以 $m\ge 2$，故 m 的取值范围为 $\left[2,+\infty\right)$.

21.【答案】(1) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

(2) 18

【分析】(1) 根据已知条件利用正弦定理求解即可.

(2) 由题意可知只有①符合，②③不符合，通过面积公式和正弦定理求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $2a\sin B=\sqrt{2}b$，

则由正弦定理可得，

$2\sin A\sin B=\sqrt{2}\sin B$，

因为 $B\in\left(0,\pi\right),\sin B>0$

所以 $2\sin A=\sqrt{2}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

所以 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $A=\frac{3\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

若选①，即 $\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$，

所以 $0<A<\frac{\pi}{2},0<B<\frac{\pi}{2},\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $A=\frac{\pi}{4}$，

则 $\sin B=\sin\left(\pi-\left(A+C\right)\right)=\sin\left(A+C\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

由正弦定理得：

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$a=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{15}, c=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{3}$

则 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，

$\triangle ABC$ 面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{15}\times6\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=18$.

若选②，即 $a=2$，又 $b=2\sqrt{6}$， $2a\sin B=\sqrt{2}b$

所以 $\sin B=\sqrt{3}$，矛盾

所以②不成立；

若选③，

由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $b=2\sqrt{6}$， $2a\sin B=\sqrt{2}b$，

得 $a=2\sqrt{15}$，

由余弦定理可得： $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

当 $A=\dfrac{\pi}{4}$ 时， $60=24+c^2-2bc\cos A$

得 $c^2-4\sqrt{3}c-36=0\Rightarrow c=6\sqrt{3}$ 或 $c=-2\sqrt{3}$ 舍；

当 $A=\dfrac{3\pi}{4}$ 时， $60=24+c^2-2bc\cos A$

得 $c^2+4\sqrt{3}c-36=0\Rightarrow c=2\sqrt{3}$ 或 $c=-6\sqrt{3}$ 舍；

此时 $\triangle ABC$ 存在但不唯一确定，所以不合题意.

22.【答案】(1）证明见解析

（2） $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$

（3） $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

【分析】(1）根据线面垂直的性质可得 $PD\perp CE$，利用相似三角形的判定与性质可得 $BD\perp CE$，结合线面垂直的判定定理即可得证；

（2）根据题意和线面垂直的性质可得 AD,CD,PD 两两垂直，建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$，求得平面 PCE 和平面 ACE 的法向量，利用空间向量的数量积表示即可得解；

（3）结合（2）中结论，利用空间向量的点面距离公式即可得解.

【小问 1 详解】

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $CE\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp CE$.

因为 $AB=4$， $AE=\dfrac{3}{4}AB$，所以 $AE=3$， $BE=1$.

所以 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{BE}=2$， $\angle ABC=\angle EBC$ ，所以 $\mathrm{Rt}\triangle CBE\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAD$，

所以 $BD\perp CE$.

又因为 $PD\perp CE$， $PD\cap BD=D$， $PD,BD\subset$ 平面 PBD，

所以 $CE\perp$ 平面 PBD.

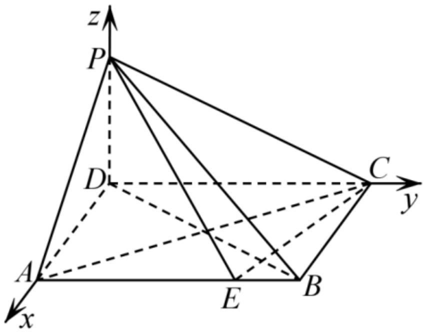
【小问 2 详解】

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$， $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AD$， $PD\perp CD$，

又因为 $ABCD$ 是矩形， $AD\perp CD$，

所以 AD,CD,PD 两两垂直，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 $C(0,4,0)$， $P(0,0,2)$， $E(2,3,0)$， $A(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,4,-2)$， $\overrightarrow{CE}=(2,-1,0)$.

设平面 PCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x-y=0\\ 4y-2z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=2$， $z=4$，于是 $\vec{n}=(1,2,4)$，

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

取平面 CED 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{4}{1\times\sqrt{1+4+16}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

由图可知二面角 $P-CE-D$ 为锐角，

所以二面角 $P-CE-D$ 的余弦值是 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

【小问 3 详解】

由（2）知 $\overrightarrow{AP}=(-2,0,2)$，而平面 PCE 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,2,4)$，

所以点 A 到平面 PCE 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{-2+8}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

23.【答案】（1）证明过程见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

（3）存在，$\dfrac{2}{3}$

【分析】（1）由面面垂直得到线面垂直，进而得到线线垂直；

（2）建立空间直角坐标系，求出平面的法向量，利用公式得到线面角的正弦值；

（3）设 $\dfrac{BM}{BD}=\lambda\in[0,1]$，得到 $M(1-\lambda,\lambda,0)$，求出平面的法向量，由垂直关系得到方程，求出答案.

【小问 1 详解】

因为四边形 $ADEF$ 为正方形，所以 $AF\perp AD$，

因为平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$，平面 $ADEF\cap$平面 $ABCD=AD$，$AF\subset$平面 $ADEF$，

所以 $AF\perp$平面 $ABCD$，

因为 $CD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AF\perp CD$；

【小问 2 详解】

因为 $AF\perp$平面 $ABCD$，$AB,AD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AF\perp AB$，$AF\perp AD$，

又 $\angle BAD=90^\circ$，故 AB，AF，AD 两两垂直，

以 A 为坐标原点，AB,AD,AF 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $AD//BC,\angle BAD=90^\circ,AB=AD=1,BC=3$，

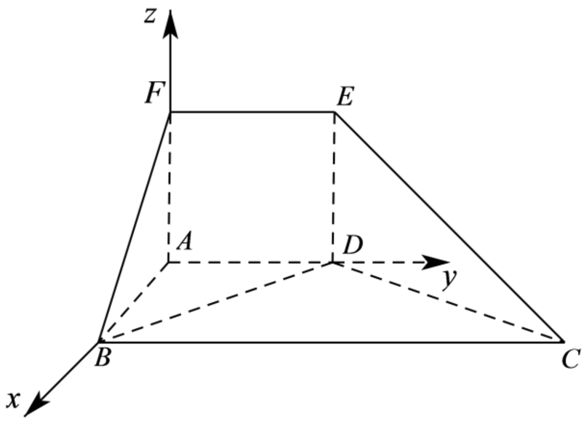
所以 $B(1,0,0),F(0,0,1),C(1,3,0),D(0,1,0),E(0,1,1)$，

设平面 CDE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=(x,y,z)\cdot(-1,-2,0)=-x-2y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{ED}=(x,y,z)\cdot(0,0,-1)=-z=0\end{cases}$，

解得 $z=0$，令 $y=1$，则 $x=-2$，

则 $\vec{m}=(-2,1,0)$，



$\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$，

设直线 BF 与平面 CDE 所成角的大小为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BF}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{|(-1,0,1)\cdot(-2,1,0)|}{\sqrt{1+1}\times\sqrt{4+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；

【小问 3 详解】

设 $\dfrac{BM}{BD}=\lambda\in[0,1]$，即 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}$，

当 $\lambda=0$ 时，M 与 B 重合，此时 CE 与平面 AFM 不平行，

当 $\lambda\neq0$ 时，设 $M(s,t,0)$，则 $(s-1,t,0)=\lambda(-1,1,0)$，

解得 $s=1-\lambda,t=\lambda$，故 $M(1-\lambda,\lambda,0)$，

设平面 AFM 的法向量为 $\vec{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=(a,b,c)\cdot(0,0,1)=c=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=(a,b,c)\cdot(1-\lambda,\lambda,0)=(1-\lambda)a+\lambda b=0\end{cases}$，

令 $a=1$，则 $b=\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$，故 $\vec{n}=\left(1,\dfrac{\lambda-1}{\lambda},0\right)$，

则 $\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}=(-1,-2,1)\cdot\left(1,\dfrac{\lambda-1}{\lambda},0\right)=-1-2\dfrac{\lambda-1}{\lambda}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}\in[0,1]$，

故线段 BD 上存在点 M，使得直线 $CE//$ 平面 AFM，此时 $\dfrac{BM}{BD}=\dfrac{2}{3}$.

24.【答案】（1）数列 A 是，数列 B 不是；

（2）不存在，理由见解析；

（3）答案见解析.

【分析】（1）根据定义验证 $a_{n+1}-a_n\geq2$ 是否恒成立，即可判断；

（2）假设存在，则由已知 $b_{n+1}=b_n+\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$ 可推得 $b_{n+1}-b_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

当 $n>\dfrac{1}{\lambda^2}$ 时，$b_{n+1}-b_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\lambda$，这与假设矛盾，所以不存在；

（3）根据已知推出 $a_{n+1}\geq a_n+1$，进而推出 $a_m\geq m$，$a_{m-1}\leq a_m-1$，$\cdots$，$a_1\leq a_m-(m-1)$，相加可推得 $a_m\geq\dfrac{150}{m}+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{2}$. 根据基本式，结合题意可得 a_m+m 的最小值不小于 30.进而得出 m 的范围，得到所有可能的整数解.分情况讨论，得出数列，即可得到 a_m 的所以可能的取值.

【小问 1 详解】

根据定义，$P(2)$ 数列应满足 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+1}\geq a_n+2$，

即 $a_{n+1}-a_n\geq 2$ 恒成立.

对于数列 A：有 $5-3=2\geq 2$，$8-5=3\geq 2$，$13-8=5\geq 2$，$21-13=8\geq 2$ 均满足，所以数列 A 是 $P(2)$ 数列；

对于数列 B，因为 $5-\pi<2$ 不满足，所以数列 B 不是 $P(2)$ 数列.

【小问 2 详解】

不存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列.

说明理由如下：假设存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列，

则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_{n+1}\geq b_n+\lambda$，即 $b_{n+1}-b_n\geq\lambda$ 恒成立.

因为 $b_{n+1}=b_n+\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，

当 $n>\dfrac{1}{\lambda^2}$ 时，$b_{n+1}-b_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\lambda$，这与假设矛盾.

所以，不存在正实数 λ，使得数列 $\{b_n\}$ 是 $P(\lambda)$ 数列.

【小问 3 详解】

因为数列 $\{a_n\}$ 是 $P(1)$ 数列，所以 $a_{n+1}\geq a_n+1$.

所以 $a_m\geq a_{m-1}+1\geq a_{m-2}+2\geq\cdots\geq a_1+m-1\geq m$，

所以 $a_{m-1}\leq a_m-1$，$a_{m-2}\leq a_{m-1}-1\leq a_m-2$，$a_{m-3}\leq a_{m-2}-1\leq a_m-3$，$\cdots$，

$a_2\leq a_3-1\leq a_m-(m-2)$，$a_1\leq a_2-1\leq a_m-(m-1)$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m\leq ma_m-[1+2+3+\cdots+(m-1)]=ma_m-\dfrac{m(m-1)}{2}$，

即$150 \le ma_m - \dfrac{m(m-1)}{2}$，所以$a_m \ge \dfrac{150}{m} + \dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{2}$.

所以$a_m + m \ge \dfrac{150}{m} + \dfrac{3m}{2} - \dfrac{1}{2} \ge 2\sqrt{\dfrac{150}{m} \times \dfrac{3m}{2}} - \dfrac{1}{2} = 30 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{59}{2}$，

因为数列$\{a_n\}$是整数列，所以$a_m + m$的最小值不小于 30.

假设$a_m + m = 30$，必有$\dfrac{150}{m} + \dfrac{3m}{2} - \dfrac{1}{2} \le 30$，解得$\dfrac{25}{3} \le m \le 12$，

因为$m \in \mathbf{N}^*$，所以m可取 9，10，11，12.

当$m = 9$时，$a_m = 21$，存在满足条件的数列.

$a_1 = 10$，$a_2 = 14$，$a_3 = 15$，$a_4 = 16$，$a_5 = 17$，$a_6 = 18$，$a_7 = 19$，$a_8 = 20$，$a_9 = 21$；

当$m = 10$时，$a_m = 20$，存在满足条件的数列.

$a_1 = 6$，$a_2 = 12$，$a_3 = 13$，$a_4 = 14$，$a_5 = 15$，$a_6 = 16$，$a_7 = 17$，$a_8 = 18$，$a_9 = 19$，$a_{10} = 20$；

当$m = 11$时，$a_m = 19$，存在满足条件的数列.

$a_1 = 5$，$a_2 = 10$，$a_3 = 11$，$a_4 = 12$，$a_5 = 13$，$a_6 = 14$，$a_7 = 15$，$a_8 = 16$，$a_9 = 17$，$a_{10} = 18$，$a_{11} = 19$；

当$m = 12$时，$a_m = 18$，存在满足条件的数列.

$a_1 = 7$，$a_2 = 8$，$a_3 = 9$，$a_4 = 10$，$a_5 = 11$，$a_6 = 12$，$a_7 = 13$，$a_8 = 14$，$a_9 = 15$，$a_{10} = 16$，$a_{11} = 17$，$a_{12} = 18$.

以上都是$a_m + m = 30$的充分条件.

所以$a_m + m$的最小值为 30，此时a_m的所有可能的取值为18，19，20，21.