2023 北京海淀高三（上）期中

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|x<2\},B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $\{1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 若复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $z=$（　）

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=\ln x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=|\tan x|$　　D. $y=2^{|x|}$

4.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(2,1),\vec{a}-\vec{b}=(-1,2)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A. -5　　B. 0　　C. 5　　D. 7

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=15$，则 $a_2\cdot a_4$ 的最大值为（　）

A. $\dfrac{9}{4}$　　B. 3　　C. 9　　D. 36

6. 设 $a=\log_4 6,b=\log_2 3,c=\dfrac{3}{2}$，则（　）

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

7. "$\sin\theta+\tan\theta>0$"是"θ 为第一或第三象限角"的（　）

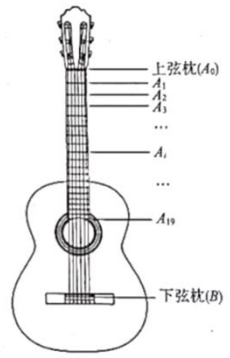
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sin 2A,c=2a$，则（　）

A. $\angle B$ 为直角　　B. $\angle B$ 为钝角　　C. $\angle C$ 为直角　　D. $\angle C$ 为钝角

9. 古典吉他的示意图如图所示. A_0,B 分别是上弦枕、下弦枕，$A_i\,(i=1,2,\cdots,19)$ 是第 i 品丝. 记 a_i 为 A_i 与 A_{i-1} 的距离，L_i 为 A_i 与 A_0 的距离，且满足 $a_i=\dfrac{X_L-L_{i-1}}{M},i=1,2,\cdots,19$，其中 X_L 为弦长（A_0 与 B 的距离），M 为大于 1 的常数，并规定 $L_0=0$. 则（　）



A. 数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等差数列，且公差为 $-\dfrac{X_L}{M^2}$

B. 数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{M-1}{M}$

C. 数列 $L_1,L_2,\cdots,L_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{2M-1}{M}$

D. 数列 $L_1,L_2,\cdots,L_{19}$ 是等差数列，且公差为 $\dfrac{(M-1)X_L}{M^2}$

10. 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=2,M$ 为斜边 BC 的中点，以 M 为圆心，MA 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，点 P 在线段 BC 上，点 Q 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|$ 的取值范围是（　）

A. $\left[0,\sqrt{10}\right]$　　B. $\left[0,2+\sqrt{2}\right]$　　C. $\left[2-\sqrt{2},\sqrt{10}\right]$　　D. $\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

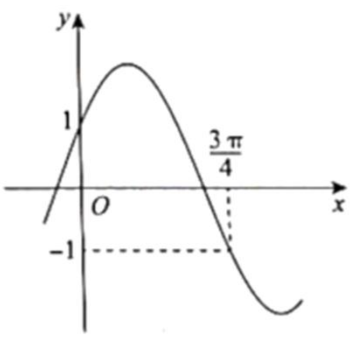
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\lg(x+1)+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $P(1,-2)$，则 $\tan 2\alpha=$________.

13. 已知非零向量 $\vec{a}=x\left(\vec{e_1}+\vec{e_2}\right),\vec{b}=\vec{e_1}+y\vec{e_2}$，其中 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是一组不共线的向量．能使得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反的一组实数 x,y 的值为 $x=$________，$y=$________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示.



①函数 $f(x)$ 的最小正周期为________；

②将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $t(t>0)$ 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象．若函数 $g\left(x\right)$ 为奇函数，则 t 的最小值是________.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x}+a,x<a\\x^{2}+2ax,x\geq a\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)$ 的最小值为 0；

②当 $a\leq\dfrac{1}{3}$ 时，$f\left(x\right)$ 存在最小值；

③ $f\left(x\right)$ 的零点个数为 $g\left(a\right)$，则函数 $g\left(a\right)$ 的值域为 $\left\{0,1,2,3\right\}$；

④当 $a\geq1$ 时，对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R},f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知无穷等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的各项均为整数，其前 n 项和为 $S_n,a_2=3,a_1+a_3=10$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式;

（2）证明：对 $\forall k\in\mathbf{N}^{*},3S_k,2S_{k+1},S_{k+2}$ 这三个数成等差数列.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=2\cos x\cdot\cos\left(x+\varphi\right)\left(\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f\left(x\right)$ 存在.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$；

条件②：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数;

条件③：$\forall x\in\mathrm{R},f\left(x\right)\geq f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（1）求 φ 的值;

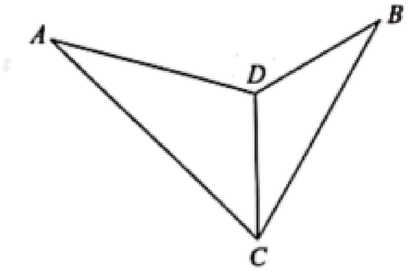
（2）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上的最大值和最小值.

18. 已知曲线 $C:y=4-x^{2}$ 与 x 轴交于不同的两点 A,B（点 A 在点 B 的左侧），点 $P\left(t,0\right)$ 在线段 AB 上（不与端点重合），过点 P 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q.

（1）若 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，求 $\triangle APQ$ 的面积;

（2）记$\triangle APQ$的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

19. 某景区有一人工湖，湖面有A,B两点，湖边架有直线型栈道CD，长为50m，如图所示．现要测是A,B两点之间的距离，工作人员分别在C,D两点进行测量，在C点测得$\angle ACD=45°$，$\angle BCD=30°$；在D点测得$\angle ADB=135°,\angle BDC=120°$．（$A,B,C,D$在同一平面内）



（1）求A,B两点之间的距离；

（2）判断直线CD与直线AB是否垂直，并说明理由.

20. 已知函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+a}{x^2+b}$，且$f(1)=\dfrac{1}{4},f(4)=\dfrac{2}{19}$.

（1）求a,b的值；

（2）求$f(x)$的单调区间；

（3）设实数m满足：存在$k\in\mathbf{R}$，使直线$y=kx+m$是曲线$y=f(x)$的切线，且$kx+m\geq f(x)$对$x\in[0,+\infty)$恒成立，求m的最大值.

21. 设无穷数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,\{i_n\}$为单调递增的无穷正整数数列，记$A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，定义$\Omega=\left\{j\in\mathbf{N}^*\middle|S_k-S_j\geq 0,k=j+1,j+2,\cdots\right\}$.

（1）若$a_n=n,i_n=n^2(n=1,2,\cdots)$，写出$A_1,A_2$的值；

（2）若$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，求$\Omega$；

（3）设$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$求证：对任意的无穷数列$\{a_n\}$，存在数列$\{i_n\}$，使得$\{\operatorname{sgn}(A_n)\}$为常数列.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】根据并集的运算即可求解.

【详解】A 集合包含所有小于 2 的实数，B 包含 1 和 2 两个元素，所以 $A\cup B=\left\{x\left|x\le 2\right.\right\}$，

故选：B.

2.【答案】A

【分析】根据复数除法和乘法运算法则计算.

【详解】$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{2}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\left(-1-\mathrm{i}\right)}{\left(-1+\mathrm{i}\right)\left(-1-\mathrm{i}\right)}=\dfrac{2\left(-1-\mathrm{i}\right)}{1+1}=-1-\mathrm{i}$.

故选：A.

3.【答案】D

【分析】A 选项，$y=\ln x$ 定义域不关于原点对称，不是偶函数；B 选项，$f\left(x\right)=x^3$ 为奇函数；C 选项，根据 $g\left(\pi\right)=g\left(2\pi\right)=0$ 得到 C 不满足在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；D 选项，判断出函数为偶函数且在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

【详解】A 选项，$y=\ln x$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，定义域不关于原点对称，故不是偶函数，A 错误；

B 选项，$f\left(x\right)=x^3$ 的定义域为 R，且 $f\left(-x\right)=-x^3=-f\left(x\right)$，故 $f\left(x\right)=x^3$ 为奇函数，B 错误；

C 选项，设 $g\left(x\right)=\left|\tan x\right|$，因为 $g\left(\pi\right)=\left|\tan\pi\right|=0,g\left(2\pi\right)=\left|\tan 2\pi\right|=0$，

故 $y=\left|\tan x\right|$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上不单调递增，C 错误；

D 选项，$h\left(x\right)=2^{\left|x\right|}$ 的定义域为 R，且 $h\left(-x\right)=2^{\left|-x\right|}=2^{\left|x\right|}=h\left(x\right)$，故 $h\left(x\right)=2^{\left|x\right|}$ 为偶函数，

又当 $x>0$ 时，$h\left(x\right)=2^x$，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，故满足要求，D 正确.

故选：D

4.【答案】C

【分析】先求出 $\vec{b}=\vec{a}-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(3,-1\right)$，进而利用向量数量积公式求出答案.

【详解】因为 $\vec{a}=\left(2,1\right),\vec{a}-\vec{b}=\left(-1,2\right)$，所以 $\vec{b}=\vec{a}-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(2,1\right)-\left(-1,2\right)=\left(3,-1\right)$，

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2,1\right)\cdot\left(3,-1\right)=2\times 3-1=5$.

故选：C

5.【答案】C

【分析】先求得a_3的关系式，然后利用基本不等式求得正确答案.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$S_5=5a_1+10d=15, a_1+2d=3$，

也即$a_3=3$，所以$a_2\cdot a_4\le\left(\dfrac{a_2+a_4}{2}\right)^2=a_3^2=9$，

当且仅当$a_2=a_4=3$时等号成立.

故选：C

6.【答案】D

【分析】首先将这三个数化为同底的对数，再根据单调性比较大小.

【详解】$a=\log_4 6=\log_2\sqrt{6}$，$b=\log_2 3=\log_2\sqrt{9}$，

$c=\dfrac{3}{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_2\sqrt{8}$，

因为$y=\log_2 x$是增函数，$\sqrt{6}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$，

所以$a<c<b$.

故选：D

7.【答案】C

【分析】根据同角三角函数关系化简，根据三角函数在各象限的符号，结合充分条件、必要条件即可得解.

【详解】因为$\sin\theta+\tan\theta=\dfrac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\cos\theta}>0$时，则$\tan\theta>0$，

所以θ为第一或第三象限角，

反之，当θ为第一或第三象限角时，$\tan\theta>0$，所以$\sin\theta+\tan\theta>0$，

综上，“$\sin\theta+\tan\theta>0$”是“θ为第一或第三象限角”的充分必要条件，

故选：C

8.【答案】C

【分析】由正弦定理边化角得$\cos A=\dfrac{b}{2a}$，结合余弦定理和$c=2a$化解，可求出A,B,C.

【详解】由$\sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A$，即$b=2a\cos A$，$\cos A=\dfrac{b}{2a}$，

又$c=2a$，所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+4a^2-a^2}{2b\cdot 2a}=\dfrac{b}{2a}$，化简得$b=\sqrt{3}a$，

则$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，故在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{6},B=\dfrac{\pi}{3},C=\dfrac{\pi}{2}$，

故选：C

9.【答案】B

【分析】根据项与前n项和的关系结合条件可得$a_{i+1}=\dfrac{M-1}{M}a_i$，根据等比数列的概念进而判断AB，结合

条件可得 $L_{i-1}=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$，进而判断 CD.

【详解】因为 $a_i=\frac{X_L-L_{i-1}}{M},i=1,2,\cdots,19$，$L_0=0$，

所以 $a_1=\frac{X_L}{M}$，$a_{i+1}=\frac{X_L-L_i}{M}$，

所以 $a_{i+1}-a_i=\frac{X_L-L_i}{M}-\frac{X_L-L_{i-1}}{M}=\frac{-\left(L_i-L_{i-1}\right)}{M}=-\frac{a_i}{M}$，

即 $a_{i+1}=a_i-\frac{a_i}{M}=\frac{M-1}{M}a_i$，又 M 为大于 1 的常数，

所以 $\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{M-1}{M}$，即数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\frac{M-1}{M}$，故 A 错误，B 正确；

由上可知 $a_i=\frac{X_L}{M}\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$，又 $a_i=\frac{X_L-L_{i-1}}{M},i=1,2,\cdots,19$，

所以 $L_{i-1}=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$，$L_i=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i}$，

所以 $\frac{L_i}{L_{i-1}}=\frac{1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i}}{1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}},i=2,3,\cdots,19$ 不是常数，故 C 错误；

所以 $L_i-L_{i-1}=X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i},i=2,3,\cdots,19$，不是常数，故 D 错误.

故选：B.

10.【答案】A

【分析】根据向量的坐标运算即可得 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|=\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$，进而将 $\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$ 可看作是点 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$ 到点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 的距离，即可求解.

【详解】以 M 为圆心，以 MA,MC 为 x,y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

由于 $AB=AC=2,$ 所以 $BC=2\sqrt{2},BM=CM=\sqrt{2}$，

由于点 Q 在 AC，不妨设 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$A\left(0,\sqrt{2}\right),P\left(a,0\right)$，其中 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}=\left(a,-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)=\left(a+\sqrt{2}\cos\theta,-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)$,

所以$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|=\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$，

$\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\cos\theta\right)^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}$ 可看作是 AC 上的点 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$ 到点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 的距离，

由于点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 在线段 $y=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\right)$ 上运动，

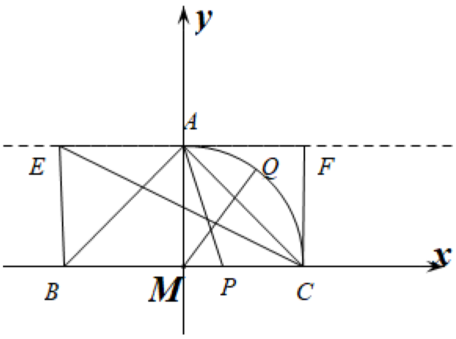
故当点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 运动到点 $E\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 时，此时距离最大，为

$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}$,

当点 $R\left(-a,\sqrt{2}\right)$ 运动到点 $A\left(0,\sqrt{2}\right)$ 时，此时距离最小为 0，

综上可知：$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|\in\left[0,\sqrt{10}\right]$,

故选：A



二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$(-1,0)\cup(0,+\infty)$

【详解】要使函数 $f(x)=\lg(x+1)+\dfrac{1}{x}$ 有意义，则 $\begin{cases}x+1>0\\x\neq 0\end{cases}$，解得 $x>-1,x\neq 0$，所以函数 $f(x)=\lg(x+1)+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$，故答案为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

12. 【答案】$\dfrac{4}{3}$

【分析】根据三角函数的定义及二倍角公式即得.

【详解】由三角函数的定义可知 $\tan\alpha=-2$,

所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{-4}{1-4}=\dfrac{4}{3}$

故答案为：$\dfrac{4}{3}$.

13.【答案】 ①. -1(不唯一) ②. 1

【分析】设$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\lambda<0)$，则有$x\overrightarrow{e_1}+x\overrightarrow{e_2}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\lambda y\overrightarrow{e_2}$，列出方程组求解即可.

【详解】解：设$\vec{a}=\lambda\vec{b}(\lambda<0)$，

则有$x\left(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\right)=\lambda(\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})$，

即$x\overrightarrow{e_1}+x\overrightarrow{e_2}=\lambda\overrightarrow{e_1}+\lambda y\overrightarrow{e_2}$，

所以$\begin{cases}x=\lambda\\x=\lambda y\end{cases}$，所以$x=xy(x<0)$，解得$x<0,y=1$，

取$x=-1,y=1$.

故答案为：-1(不唯一)，1

14.【答案】 ①. $\frac{3\pi}{2}$ ②. $\frac{\pi}{8}$

【分析】空 1：可由图像直接读出半个周期，进而可得周期大小；空 2：通过周期大小和函数上的点$\left(0,1\right)$，可求出$f\left(x\right)$的解析式，再平移得到$g\left(x\right)$，然后根据奇偶性求参即可.

【详解】空 1：由图可知$\frac{1}{2}T=\frac{3\pi}{4}-0=\frac{3\pi}{4}$,即$T=\frac{3\pi}{2}$

空 2：$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{3\pi}{2}$,即$\omega=\frac{4}{3}$，

则$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\varphi\right)$，又过点$\left(0,1\right)$，

所以$f\left(0\right)=2\sin\varphi=1$，即$\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

又$\left(0,1\right)$在原图增区间上，所以可取$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}\right),k\in\mathbf{Z}$，

向右平移$t(t>0)$个单位可得$g\left(x\right)=f\left(x-t\right)=2\sin\left[\frac{4}{3}\left(x-t\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}-\frac{4}{3}t\right)$，

又$g\left(x\right)$为奇函数，所以$\frac{\pi}{6}-\frac{4}{3}t=k\pi,k\in\mathrm{Z}$，

即$t=\frac{\pi}{8}-k\cdot\frac{3\pi}{4},k\in\mathrm{Z}$，

又$t>0$，

所以$t_{\min}=\frac{\pi}{8}$.

故答案为：$\frac{3\pi}{2}$；$\frac{\pi}{8}$.

15.【答案】①③

【分析】利用函数的单调性及最值可判断①②，根据零点定义结合条件分类讨论可判断③，利用特值可判断④.

【详解】对①，当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$，

当 $x<0$ 时，$0<2^x<1$，当 $x\geq 0$ 时，$x^2\geq 0$，

综上，$f\left(x\right)$ 的最小值为 0，①正确；

对②，$a\leq\frac{1}{3}$，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+a, x<a\\ x^2+2ax, x\geq a\end{cases}$，

当 $x<a$ 时，$2^x+a>a$，

当 $x\geq a$ 时，若 $a<0$，$x^2+2ax\geq a^2-2a^2=-a^2$；若 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$，$x^2+2ax\geq a^2+2a^2=3a^2$，

如 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)>-\frac{1}{2}$，函数不存在最小值，②错误；

对③，当 $a<0$ 时，$2^x+a=0$ 最多一个解，

$y=x^2+2ax=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-2a$，

如 $a=-1$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-1, x<-1\\ x^2-2x, x\geq -1\end{cases}$，由 $2^x-1=0$ 可得 $x=0$(舍去)，

由 $x^2-2x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$，故此时 $f\left(x\right)$ 两个零点，即 $g\left(a\right)=2$；

如 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-\frac{1}{2}, x<-\frac{1}{2}\\ x^2-x, x\geq -\frac{1}{2}\end{cases}$，由 $2^x-\frac{1}{2}=0$ 可得 $x=-1$，

由 $x^2-x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=1$，故此时 $f\left(x\right)$ 三个零点，即 $g\left(a\right)=3$；

当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$，由 $2^x=0$ 可得 $x\in\varnothing$，

由 $x^2=0$ 得 $x=0$，故此时 $f\left(x\right)$ 一个零点，即 $g\left(a\right)=1$；

当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+a, x<a\\ x^2+2ax, x\geq a\end{cases}$，$x<a$ 时，$2^x+a>0$，$2^x+a=0$ 无解，

$x\geq a>0$ 时，$x^2+2ax>0$，$x^2+2ax=0$ 无解，

此时 $f\left(x\right)$ 没有零点，即 $g\left(a\right)=0$.

综上，$g\left(a\right)$的值域为$\{0,1,2,3\}$，故③正确；

对④，当$a\geq 1$时，如$a=4$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+4, x<4\\ x^2+8x, x\geq 4\end{cases}$，

$f\left(3\right)=12$，$f\left(4\right)=48$，$f\left(5\right)=65$，此时$f\left(3\right)+f\left(5\right)=77<2f\left(4\right)=96$，故④错误.

故答案为：①③

【点睛】方法点睛：函数零点的求解与判断方法：

(1)直接求零令$f\left(x\right)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点.

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间$[a,b]$上是连续不断的曲线，且$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】16. 3^{n-1}　17. 证明见解析

【分析】（1）设出公比，代入已知条件，解方程即可；

（2）按照等差数列的定义，作差即可证明.

【详解】（1）设公比为q，由题意有$a_1+a_3=\dfrac{a_2}{q}+a_2q=10$

代入$a_2=3$得$3q^2-10q+3=0$，故$q=\dfrac{1}{3}$或3

又各项均为整数，故$q=3$

于是$a_n=a_2\times 3^{n-2}=3^{n-1}$.

（2）由（1）得$S_k=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{3^n-1}{2}$

所以$2S_{k+1}-3S_k=2\cdot\dfrac{3^{k+1}-1}{2}-3\cdot\dfrac{3^k-1}{2}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$

$S_{k+2}-2S_{k+1}=\dfrac{3^{k+2}-1}{2}-2\cdot\dfrac{3^{k+1}-1}{2}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$.

所以$2S_{k+1}-3S_k=S_{k+2}-2S_{k+1}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$.

所以$3S_k,2S_{k+1},S_{k+2}$是以$\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$为公差的等差数列.

17.【答案】（I）$\varphi=-\frac{\pi}{3}$；

（II）最大值 1，最小值 $-\frac{1}{2}$.

解：（I）若选条件①：$f(\frac{\pi}{3})=1$，即 $1=2\cos\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)$，即 $\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

若选条件②：因为 $f(x)=2\cos x(\cos x\cos\varphi-\sin x\sin\varphi)=2\cos^2x\cos\varphi-2\sin x\cos x\sin\varphi$
$=(1+\cos 2x)\cos\varphi-\sin 2x\sin\varphi=\cos\varphi+\cos 2x\cos\varphi-\sin 2x\sin\varphi=\cos\varphi+\cos(2x+\varphi)$，

因为函数 f（x）在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上是增函数，则 $2x+\varphi\in[\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi]$，

所以 $-\pi+2k\pi\le\varphi<\varphi+\frac{\pi}{2}\le 2k\pi$，$k\in Z$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

解得 $\varphi\in\varnothing$；

若选条件③：$\forall x\in R$，$f(x)\ge f(\frac{2\pi}{3})$，可得 $\cos(\frac{2}{3}\pi\times2+\varphi)=-1$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$；

综上所述：$\varphi=-\frac{\pi}{3}$；

（II）由（I）可得 $f(x)=\cos(-\frac{\pi}{3})+\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}+\cos(2x-\frac{\pi}{3})$；

$x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\pi]$，

令 $t=2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}]$，则 $g(t)=\frac{1}{2}+\cos t,t\in[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}]$，

当 $t\in[-\frac{4}{3}\pi,-\pi]$ 时，g（t）单调递减，

当 $t\in[-\pi,-\frac{\pi}{3}]$ 时，g（t）单调递增，

所以 $t\in[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}]$，$g(t)_{min}=g(-\pi)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，

而 $g(-\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，$g(-\frac{\pi}{3}\pi)=\frac{1}{2}$，

所以函数 g（t）的最大值为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$；

所以求 f（x）在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的最大值 1，最小值 $-\frac{1}{2}$.

18.【答案】(1) $\frac{9}{2}$

（2）$\frac{128}{27}$

【分析】(1) 求得 A,B,P,Q 的坐标，从而求得三角形 APQ 的面积.

（2）先求得三角形 APQ 面积的表达式，然后利用导数求得面积的最大值.

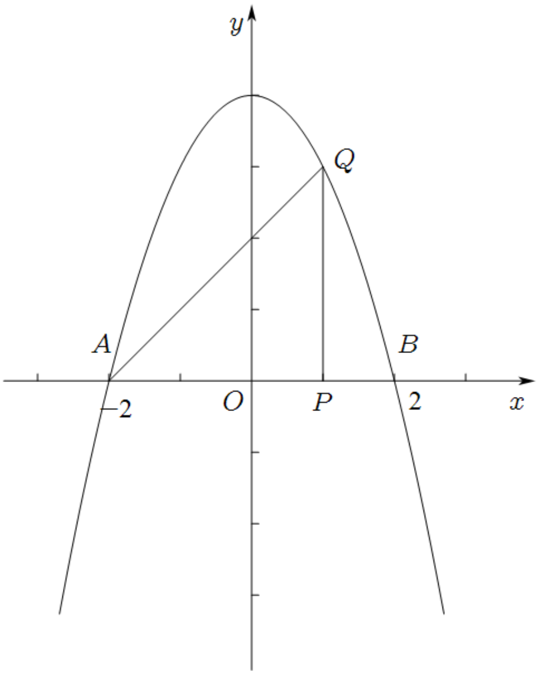
【小问 1 详解】

依题意，$AP \perp PQ$，所以 $|AP| = |PQ|$，

由 $P(t,0)$，得 $Q(t,4-t^2)$，

则 $t-(-2) = 4-t^2$，解得 $t=1$ 或 $t=-2$（舍去），则 $P(1,0), Q(1,3)$，

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$.



【小问 2 详解】

由 $P(t,0)$，得 $Q(t,4-t^2)$，

则 $S(t) = \frac{1}{2} \times (t+2) \times (4-t^2) = -\frac{1}{2}t^3 - t^2 + 2t + 8 \ (-2 < t < 2)$，

$S'(t) = -\frac{3}{2}t^2 - 2t + 2 = \frac{-3t^2 - 4t + 4}{2}$

$= -\frac{3t^2 + 4t - 4}{2} = -\frac{(t+2)(3t-2)}{2}$，

所以 $S(t)$ 在区间 $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ 上 $S'(t) > 0, S(t)$ 单调递增，

在区间 $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ 上 $S'(t) < 0, S(t)$ 单调递减，

所以 $S(t)$ 的最大值是 $S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + 2\right)\left(4 - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{32}{9} = \frac{128}{27}$.

19. 【答案】(1) $50\sqrt{5}\text{m}$

(2) 直线 CD 与直线 AB 不垂直，理由详见解析.

【分析】(1) 先求得 AD, BD，利用余弦定理求得 AB.

(2) 先求得 AC, BC，然后根据向量法进行判断.

【小问 1 详解】

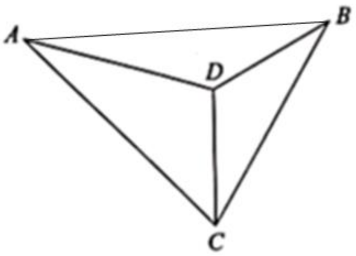
依题意，$\angle ACD = 45°$，$\angle BCD = 30°$，$\angle ADB = 135°, \angle BDC = 120°$，

所以 $\angle ADC = 360° - 135° - 120° = 105°, \angle CAD = 180° - 45° - 105° = 30°$，

$\angle CBD = 180° - 120° - 30° = 30° = \angle BCD$，所以 $BD = CD = 50$，

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin 45°} = \frac{CD}{\sin 30°} = \frac{50}{\sin 30°}, AD = 50\sqrt{2}$，

在三角形 ABD 中，由余弦定理得 $AB = \sqrt{50^2 + \left(50\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 50 \times 50\sqrt{2} \times \cos 135°} = 50\sqrt{5}\text{m}$.



【小问 2 详解】

在三角形 BCD 中，由余弦定理得 $BC = \sqrt{50^2 + 50^2 - 2 \times 50 \times 50 \times \cos 120°} = 50\sqrt{3}$，

$\sin 105° = \sin\left(60° + 45°\right) = \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$，

在三角形 ACD 中，由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin 105°} = \frac{CD}{\sin 30°}, \frac{AC}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100$，

$AC = 25\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$，

直线 CD 与直线 AB 不垂直，理由如下：

$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \cdot \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$

$= 50 \times 50\sqrt{3} \times \cos 30° - 50 \times 25\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \times \cos 45°$

$= 2500 - 1250\sqrt{3} \neq 0$，

所以直线 CD 与直线 AB 不垂直.

20. 【答案】(1) $a = 0, b = 3$

(2) 增区间 $\left(0, 1\right)$，减区间 $\left(1, +\infty\right)$

（3）$\frac{1}{4}$

【分析】（1）根据已知条件列方程组，从而求得 a,b.

（2）利用导数求得 $f\left(x\right)$ 的单调区间.

（3）结合 $f\left(x\right)$ 的图象、切线以及不等式恒成立求得 m 的最大值.

【小问 1 详解】

依题意，$\begin{cases} f\left(1\right)=\dfrac{1+a}{1+b}=\dfrac{1}{4} \\ f\left(4\right)=\dfrac{2+a}{16+b}=\dfrac{2}{19} \end{cases}$，解得 $a=0,b=3$.

【小问 2 详解】

由（1）得 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}\left(x\geq 0\right)$，$f\left(0\right)=0$，

当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(x^2+3\right)-\sqrt{x}\times 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{3\left(1+x\right)}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1-x}{\left(x^2+3\right)^2}$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上 $f'\left(x\right)>0, f\left(x\right)$ 单调递增，

在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上 $f'\left(x\right)<0, f\left(x\right)$ 单调递减.

【小问 3 详解】

由（2）得 $f'\left(1\right)=0, f\left(1\right)=\frac{1}{4}$，

所以 $y=f\left(x\right)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{4}$，此时 $m=\frac{1}{4}$.

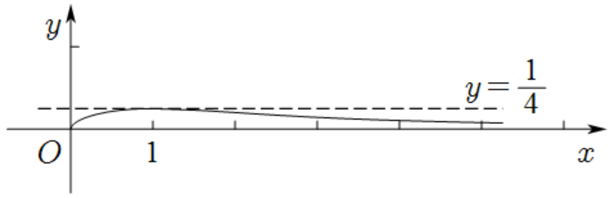
同时，$f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=\frac{1}{4}$，因此 $kx+m\geq\frac{1}{4}$ 在 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时恒成立，

直线 $y=kx+m$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，则 $k=\dfrac{3\left(1+x\right)}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1-x}{\left(x^2+3\right)^2}$，

结合图象可知，当 $k<0$ 时，$kx+m\geq f\left(x\right)$ 不恒成立.

当 $k=0$ 时，$m=\frac{1}{4}$，$kx+m\geq f\left(x\right)$ 恒成立.

当 $k>0$ 时，$m<\frac{1}{4}$，因此 $m\leq\frac{1}{4}$，所以 m 的最大值为 $\frac{1}{4}$.



【点睛】求解函数单调区间的步骤：（1）确定 $f(x)$ 的定义域；（2）计算导数 $f'(x)$；（3）求出 $f'(x)=0$ 的根；（4）用 $f'(x)=0$ 的根将 $f(x)$ 的定义域分成若干个区间，考查这若干个区间内 $f'(x)$ 的符号，进而确定 $f(x)$ 的单调区间： $f'\ x\ >0$，则 $f(x)$ 在对应区间上是增函数，对应区间为增区间；$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在对应区间上是减函数，对应区间为减区间.

21.【答案】（1） $A_1=9, A_2=35$

（2） $\Omega=\{x|\ x=2m, m=1,2,\cdots\}$

（3）证明见解析

【分析】（1）通过公式即可求出 A_1, A_2 的值；

（2）求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，对 j 讨论其奇偶，即可求出 Ω；

（3）通过讨论 Ω 为有限集和无限集时的不同情况下 $\operatorname{sgn}(A_n)$ 的值，即可证明结论.

【小问 1 详解】

由题意，

$A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，$a_n=n, i_n=n^2\ (n=1,2,\cdots)$，

$\therefore a_1=1$，$i_1=1, i_2=2^2=4, i_3=3^2=9$，

$S_1=a_1=1$，$S_{i_2}=S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+3+4=10$，

$S_{i_3}=S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9=1+2+\cdots+9=45$，

$\therefore A_1=S_4-S_1=10-1=9, A_2=S_9-S_4=45-10=35$

【小问 2 详解】

由题意，

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$，$a_1=1$

$$\therefore S_n=\frac{1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

若 j 为奇数，则 $S_{j+1}-S_j=a_{j+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^j<0$.

所以 $j \notin \Omega$.

若 j 为偶数，则当 $k = j+1, j+2, \cdots$ 时，

$$S_k - S_j = \frac{2}{3} \times \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^j - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] \geq \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] > 0.$$

所以 $j \in \Omega$.

所以 $\Omega = \{x | \ x = 2m, m = 1, 2, \cdots\}$.

【小问 3 详解】

由题意证明如下，

在 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 中，

若 Ω 为有限集，设其最大元素为 m (若 Ω 为空集，取 $m = 0$)，

则当 $j = m+1, m+2, \cdots$ 时，存在 $k > j$ 满足 $S_k - S_j < 0$.

令 $i_1 = m+1, i_{n+1} = \min\left\{k \in \mathbf{N}^* | \ k > i_n, S_k - S_{i_n} < 0\right\} (n = 1, 2, \cdots)$，

则 $A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n} < 0$.所以 $\operatorname{sgn}(A_n) = -1 (n = 1, 2, \cdots)$；

若 Ω 为无限集，设 $\Omega = \left\{j_1, j_2, \cdots\right\}$，其中 $j_1 < j_2 < \cdots$，记 $B_n = S_{j_{n+1}} - S_{j_n}$，则 $B_n \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

①若数列 $\left\{B_n\right\}$ 中只有有限项为正数，记 $m = \max\left\{n \in \mathbf{N}^* | \ B_n > 0\right\}$ (若 $\left\{B_n\right\}$ 中没有正数项，取 $m = 0$)，则 $B_{m+n} = 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

令 $i_n = j_{m+n} (n = 1, 2, \cdots)$，则 $A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n} = B_{m+n} = 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

所以 $\operatorname{sgn}(A_n) = 0 (n = 1, 2, \cdots)$；

②若数列 $\left\{B_n\right\}$ 中有无穷项为正数，将这些项依次记为 $B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots$，其中 $t_1 < t_2 < \cdots$，则 $B_n = S_{j_{n+1}} - S_{j_n} > 0 (n = 1, 2, \cdots)$.

令 $i_n = j_{t_n} (n = 1, 2, \cdots)$，则 $A_n = S_{j_{t_{n+1}}} - S_{j_{t_n}} = B_{t_n} + B_{t_n+1} + \cdots + B_{t_{n+1}-1} > 0$.

所以 $\operatorname{sgn}(A_n) = 1 (n = 1, 2, \cdots)$.

综上所述，对任意的无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 都存在数列 $\left\{i_n\right\}$，使得 $\left\{\operatorname{sgn}(A_n)\right\}$ 为常数列.

【点睛】关键点点睛：本题考查求数列的项，数列求和，无穷数列的证明，符号函数，考查学生的计算能力，逻辑思维能力和分类讨论能力，具有很强的综合性.