2024 北京三十五中高三（上）开学考

数　学

2024.9

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x|x^2-x<2\}$，则集合 $A\cap B=$（　）

A．$\{0,1\}$　B．$\{-1,0\}$　C．$\{-1,0,1\}$ D．$\{-1,1\}$

2．设 $z=-2+3\mathrm{i}$，则在复平面内 $\overline{z}$ 对应的点位于（　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

3．在 $(1-2x)^3$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A．-2　B．-6　C．2　D．6

4．某地区居民血型的分布为 O 型 49%，A 型 19%，B 型 25%，AB 型 7%．已知同种血型的人可以互相输血，O 型血的人可以给任何一种血型的人输血，AB 型血的人可以接受任何一种血型的血，其他不同血型的人不能互相输血。现有一血型为 A 型的病人需要输血，若在该地区任选一人，则能为该病人输血的概率为（　）

A．19% B．26% C．68% D．75%

5．下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是（　）

A．$y=-|x|$ B．$y=x^2-2x$　C．$y=x-\sin x$　D．$y=x+\dfrac{1}{x}$

6．函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2 x$，则 $f(-4)=$（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　B．2　C．$-\dfrac{1}{2}$ D．-2

7．已知 $a=2\log_3 2$，$b=\log_{\frac{1}{4}} 2$，$c=2^{-\frac{1}{3}}$，则 a，b，c 的大小关系是（　）

A．$a>b>c$　B．$c>b>a$ C．$c>a>b$ D．$a>c>b$

8．已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则“$a>\dfrac{1}{2}$ 且 $a\neq 1$”是“$\log_a 2>-1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，则（　）

A． $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上是减函数，且曲线 $y=f\left(x\right)$ 存在对称轴

B． $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上是减函数，且曲线 $y=f\left(x\right)$ 存在对称中心

C． $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上是增函数，且曲线 $y=f\left(x\right)$ 存在对称轴

D． $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上是增函数，且曲线 $y=f\left(x\right)$ 存在对称中心

10．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ \left|2x+1\right|, & x\le 0\end{cases}$，实数 a．b，m 满足 $a\le m\le b$．若对任意的 m，总有不等式 $f\left(m\right)+m\le 3$ 成立，则 $b-a$ 的最大值为（　）

A． $\dfrac{8}{3}$　B． $\dfrac{10}{3}$　C．4　D．6

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

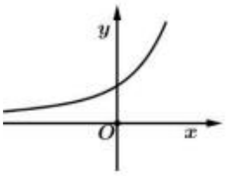
11．函数 $f\left(x\right)=\ln\left(2+x\right)+\sqrt{1-\mathrm{e}^{x}}$ 的定义域为______．

12．已知函数 $f\left(x\right)=2\log_2 x-\log_2\left(x-1\right)$，则 $f\left(x\right)$ 的定义域是______； $f\left(x\right)$ 的最小值是______．

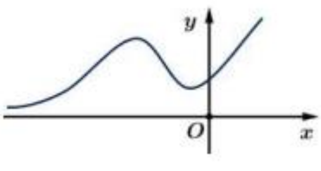
13．第 24 届冬奥会奥运村有智能餐厅 A、人工餐厅 B，运动员甲第一天随机地选择一餐厅用餐，如果第一天去 A 餐厅，那么第二天去 A 餐厅的概率为 0.6；如果第一天去 B 餐厅，那么第二天去 A 餐厅的概率为 0.8．运动员甲第二天去 A 餐厅用餐的概率为______．

14．已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_n>0$，$a_4+a_6=5$，$a_3a_5=1$，则公比 $q=$______，$a_1a_2\cdots a_n$ 的最小值为______．

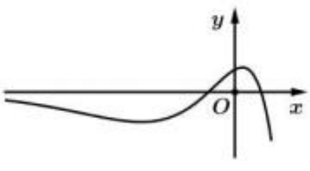
15．函数 $y=\left(kx^2+1\right)\mathrm{e}^{x}$ 的图象可能是______．



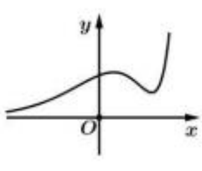
①



②



③



④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

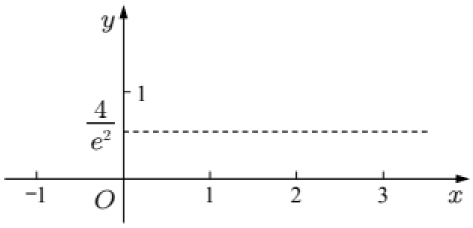
16．（14 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}$，$g\left(x\right)=-\dfrac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^{x}}+ax$．

（1） $f'\left(x\right)=$______，$g'\left(x\right)=$______；

（2） $f\left(x\right)$ 的极小值点为______，极小值为______；

（3） $f\left(x\right)$ 的极大值点为______，极大值为______；

（4）画出函数 $f\left(x\right)$ 的图象草图：



（5）若方程 $f\left(x\right)=m$ 恰好有 2 个解，则实数 $m=$______；

（6）若 $g\left(x\right)$ 在 R 上单调，则实数 a 的取值范围是______；

（7）若函数 $g\left(x\right)$ 存在极值，则极值点的个数可能为______个．（写出所有可能）

17．（13 分）

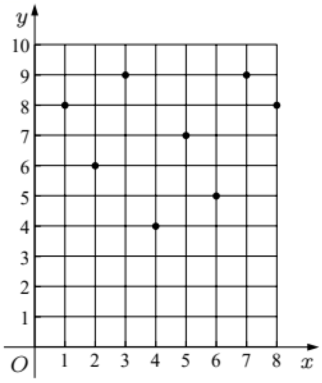
科学家发现某种特别物质的温度 y（单位：摄氏度）随时间 x（时间：分钟）的变化规律满足关系式：$y=m\cdot 2^x+2^{1-x}\left(0\le x\le 4,m>0\right)$．

（Ⅰ）若 $m=2$，求经过多少分钟，该物质的温度为 5 摄氏度；

（Ⅱ）如果该物质温度总不低于 2 摄氏度，求 m 的取值范围．

18．（13 分）

为了解某中学高一年级学生身体素质情况，对高一年级的（1）班~（8）班进行了抽测，采取如下方式抽样：每班随机各抽 10 名学生进行身体素质监测．经统计，每班 10 名学生中身体素质监测成绩达到优秀的人数散点图如下（x 轴表示对应的班号，y 轴表示对应的优秀人数）：



（Ⅰ）若用散点图预测高一年级学生身体素质情况，从高一年级学生中任意抽测 1 人，试估计该生身体素质监测成绩达到优秀的概率；

（Ⅱ）若从高一（2）班抽测的 10 人中随机抽取 2 人，从高一（4）班抽测的 10 人中随机抽取 1 人，设 X 表示这 3 人中身体素质监测成绩达到优秀的人数，求 $X=2$ 的概率；

（Ⅲ）假设每个班学生身体素质优秀的概率与该班随机抽到的 107 名学生的身体素质优秀率相等．现在从每班中分别随机抽取 1 名同学，用“$\xi_k=1$”表示第 k 班抽到的这名同学身体素质优秀，“$\xi_k=0$”表示第 k 班抽到的这名同学身体素质不是优秀$\left(k=1,2,\cdots,8\right)$．写出方差 $D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$ 的大小关系

（不必写出证明过程）.

19.（15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=x-a\ln x-1\left(a\in R\right)$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,0\right)$ 处的切线为 x 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）讨论 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 内的极值点个数；

（Ⅲ）若 $a=2$，求证：$f\left(x\right)$ 存在两个零点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，且满足 $x_1x_2<4$.

20.（15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=a^2x+2a\sqrt{x}-2\ln x\left(a\neq 0\right)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值点；

（Ⅲ）当 $a<0$ 时，若函数 $f\left(x\right)$ 无零点，求 a 的取值范围.

21.（15 分）

首项为 0 的无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 同时满足下面两个条件：

①$\left|a_{n+1}-a_n\right|=n$；②$a_n\leq\dfrac{n-1}{2}$.

（Ⅰ）请直接写出 a_4 的所有可能值；

（Ⅱ）记 $b_n=a_{2n}$，若 $b_n<b_{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 成立，求 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）对于给定的正整数 k，求 $a_1+a_2+\ldots+a_k$ 的最大值.