2024北京理工大附中高二（上）开学考

数　学

2024.09

班级______　姓名______　学号______

一、选择题，共10小题，每小题4分，共40分.

1. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$，则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$（　）

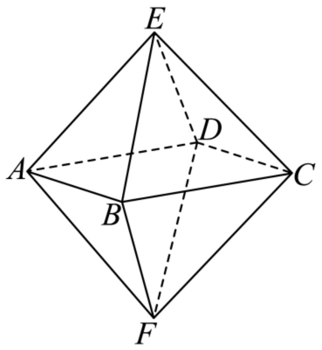
A. $1+\sqrt{3}i$　　B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

2. 若 $\sin\theta>0$， $\tan\theta<0$，则 θ 是（　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

3. 如图，八面体的每个面都是正三角形，并且4个顶点 A，B，C，D 在同一平面内，若四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形，则这个八面体的表面积为（　）



A. 8　　B. 16　　C. $8\sqrt{3}$　　D. $16\sqrt{3}$

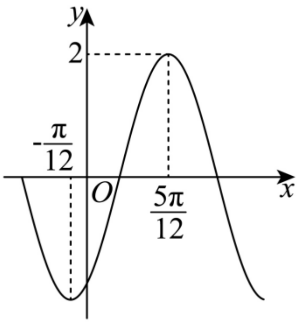
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $a=2$， $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$， $\angle B=\dfrac{5\pi}{12}$，则 $c=$（　）

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　D. $\sqrt{6}$

5. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $P(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],A(1,1)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的取值范围是（　）

A. $\left[1,\sqrt{2}\right]$　　B. $[0,2]$　　C. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left[\sqrt{2},2\right]$

6. 函数 $y=A\sin(\omega x-\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则其解析式为（　）



A. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，“存在 $m,n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=m$ 对称，又关于点 $(n,0)$ 对称”是“$\omega\ge 2$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 l，m 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是（　）

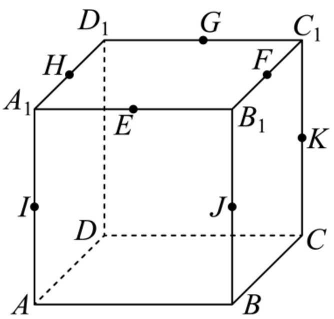
A. 若 $m\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $m//\beta$　　B. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$l//m$，则 $m//\beta$

C. 若 $m\subset\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $m\perp\beta$

9. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，$AC\perp BD$，$\angle BDC=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$DC=6$，则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的余弦值为（　）

A. $\frac{\sqrt{7}}{14}$　　B. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

10. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，其中 E，F，G，H，I，J，K 分别为棱 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1，AA_1，BB_1，CC_1 的中点，那么三棱柱 B_1FJ-A_1HI 与三棱柱 B_1EJ-C_1GK 在正方体内部的公共部分的体积为（　）



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、填空题，共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

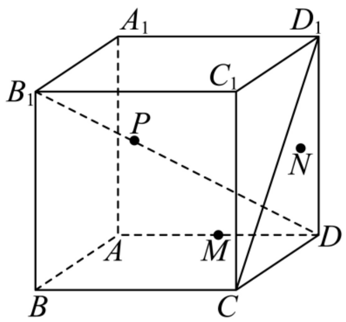
11. 已知纯虚数 z 满足 $|z-2\mathrm{i}|=1$，则 z 可以是________.

12. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$___.

13. 有一个木制工艺品，其形状是一个圆柱被挖去一个与其共底面的圆锥．已知圆柱的底面半径为 3，高为 5，圆锥的高为 4，则这个木质工艺品的体积为______；表面积为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^{\circ}, AC=6, AB=4$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$ ______，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=$ ______.

15. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 为 AD 的中点，点 N 是侧面 DCC_1D_1 上（包括边界）的动点，点 P 是线段 B_1D 上的动点，给出下列四个结论：



①任意点 P，都有 $CD_1\perp MP$；

②存在点 P，使得 $B_1D\perp$ 平面 MPC；

③存在无数组点 N 和点 P，使得 $C_1P//MN$；

④点 P 到直线 CD_1 的距离最小值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

其中所有正确结论的序号是______.

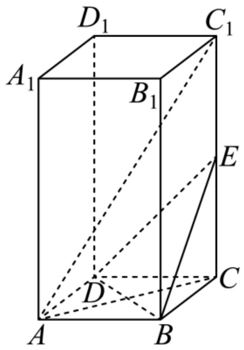
三、解答题，共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是三个内角 A,B,C 的对边，$b\sin A-a\cos\frac{B}{2}=0$.

（1）求 $\angle B$ 的大小；

（2）若 $c=1$，且 AB 边上的高是 BC 边上的高的 2 倍，求 b 及 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$CC_1=4$，E 为 CC_1 的中点.



（1）求证：$AC_1//$平面EDB；

（2）求证：平面$EDB\perp$平面ACC_1；

（3）求点C到平面EDB的距离.

18. 设函数$f\left(x\right)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$. 从下列三个条件中选择两个作为已知，使得函数$f\left(x\right)$存在.

（1）求$f\left(x\right)$的最小正周期及单调递减区间；

（2）若对于任意的$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，都有$f\left(x\right)\le c$，求实数$c$的取值范围.

条件①：函数$f\left(x\right)$的图象经过点$\left(-\frac{\pi}{6},2\right)$；

条件②：$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增；

条件③：$x=\frac{\pi}{12}$是$f\left(x\right)$的一条对称轴.

19. 设n为正整数，集合$A_n=\left\{\alpha\middle|\alpha=\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right),t_k\in\left\{0,1\right\},k=1,2,\ldots,n\right\}$. 对于集合$A_n$中的任意元素$\alpha=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$和$\beta=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)$，定义$\alpha*\beta=\left(x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2,\ldots,x_n\cdot y_n\right)$，$\alpha\odot\beta=\left(\left|x_1-y_1\right|,\left|x_2-y_2\right|,\ldots,\left|x_n-y_n\right|\right)$，以及$\left|\alpha\right|=x_1+x_2+\ldots+x_n$.

（1）若$n=5$，$\alpha=\left(1,1,1,0,1\right)$，$\alpha*\beta=\left(0,1,1,0,1\right)$，$\left|\beta\right|=4$，求$\beta$；

（2）若$\boldsymbol{n=9}$，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\left(k\ge2\right)$均为$A_n$中的元素，且$\left|\alpha_i\right|=3\left(1\le i\le k\right)$，$\left|\alpha_i*\alpha_j\right|=0\left(1\le i<j\le k\right)$，求$k$的最大值；

（3）若$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\left(k\ge2\right)$均为$A_n\left(n\ge5\right)$中的元素，其中$\left|\alpha_0\right|=0$，$\left|\alpha_k\right|=n$，且满足$\left|\alpha_i\odot\alpha_{i+1}\right|=n-2\left(0\le i\le k-1\right)$，求$k$的最小值.

参考答案

一、选择题，共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1.【答案】D

【分析】根据复数的几何意义先求出复数 z，然后利用共轭复数的定义计算.

【详解】z 在复平面对应的点是 $(-1,\sqrt{3})$，根据复数的几何意义，$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，

由共轭复数的定义可知，$\bar{z}=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

故选：D

2.【答案】B

【分析】

根据 $\sin\theta>0$，可判断 θ 可能在的象限，根据 $\tan\theta<0$，可判断 θ 可能在的象限，综合分析，即可得答案.

【详解】由 $\sin\theta>0$，可得 θ 的终边在第一象限或第二象限或与 y 轴正半轴重合，

由 $\tan\theta<0$，可得 θ 的终边在第二象限或第四象限，

因为 $\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$ 同时成立，所以 θ 是第二象限角.

故选：B

3.【答案】C

【分析】先计算出每个面的面积，再乘以 8 即为表面积；

【详解】每个面的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，所以该图形的表面积为 $8\sqrt{3}$.

故选：C

4.【答案】C

【分析】根据给定条件，利用正弦定理求解即得.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{5\pi}{12}$，得 $\angle C=\frac{\pi}{4}$，

由正弦定理 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，得 $c=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

故选：C

5.【答案】A

【分析】根据数量积的坐标运算及三角函数恒等变换化简，利用正弦函数的值域求解即可.

【详解】由题意，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,1)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

故选：A

6.【答案】B

【分析】根据函数图象的最大值，以及对称轴间点的距离，五点法，分别求解析式中的参数，即可求解.

【详解】由函数的最大值为 2，可知，$A=2$，

$\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$，得$\omega=2$，

当$x=\frac{5\pi}{12}$时，$2\times\frac{5\pi}{12}-\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，得$\varphi=\frac{\pi}{3}-2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以函数的解析式为$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

故选：B

7.【答案】B

【分析】以$\omega x+\frac{\pi}{6}$为整体，结合正弦函数对称性解得$\omega\geq\frac{5}{3}$，进而根据包含关系分析充分、必要条件.

【详解】若存在$m,n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，函数$f\left(x\right)$的图象既关于直线$x=m$对称，又关于点$\left(n,0\right)$对称，

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，且$\omega>0$，则$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，

则$\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\geq\pi$，解得$\omega\geq\frac{5}{3}$，

又因为$[2,+\infty)$是$\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$的真子集，

所以“存在$m,n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，函数$f\left(x\right)$的图象既关于直线$x=m$对称，又关于点$\left(n,0\right)$对称”是“$\omega\geq2$”的必要不充分条件.

故选：B.

8.【答案】D

【分析】根据线线，线面及面面位置关系判断各个选项即可.

【详解】对于 A:若$m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$,则可能$m\subset\beta$，A 错误；

对于 B:若$\alpha\cap\beta=l,l//m$,则可能$m\subset\beta$,B 错误；

对于 C:若$m\subset\alpha,\alpha\perp\beta$,则$m$可能不垂直$\beta$，C 错误；

对于 D:若 $m\perp\alpha,\alpha//\beta$,则 $m\perp\beta$,D 正确.

故选：D.

9.【答案】D

【分析】首先根据题干计算出相应的边长，再根据余弦定理计算出 AD,BC，再计算 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)$，最后代入夹角公式即可.

【详解】设 AC 与 BD 交于 E，因为 $\angle BDC=\frac{\pi}{3}$，$AC\perp BD$，$CD=6$，所以 $CE=3\sqrt{3}$，$DE=3$，

又因为 $AB//CD$，$AB=2$，所以 $\angle ABD=\angle BDC=\frac{\pi}{3}$，$\angle ACD=\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AE=\sqrt{3}$，$BE=1$，

所以 $BD=4$，$AC=4\sqrt{3}$，

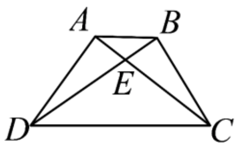
由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，即 $AD=2\sqrt{3}$，

$BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cdot\cos\angle BDC=36+16-2\times6\times4\times\frac{1}{2}=28$，即 $BC=2\sqrt{7}$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|\cos\angle ACD+\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\angle BDC-\overrightarrow{CD}^2$

$=4\sqrt{3}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\times4\times\frac{1}{2}-36=12$，所以 $\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{12}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

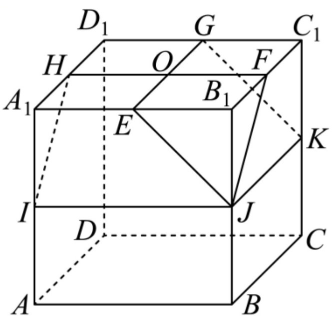
故选：D



10.【答案】C

【分析】先得出公共部分为四棱锥 $J-B_1FOE$，然后结合棱锥的体积公式直接计算即可求解.

【详解】



如图所示，设 HF,GE 交于点 O，由题意三棱柱 B_1FJ-A_1HI 与三棱柱 B_1EJ-C_1GK 在正方体内部的公共部分为四棱锥 $J-B_1FOE$，

显然四棱锥 $J-B_1FOE$ 的高为 $JB_1=1$，底面是边长为 1 的正方形，

故所求体积为$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}$.

故选：C.

二、填空题，共5小题，每小题4分，共20分.

11.【答案】3i（答案不唯一）

【分析】由复数概念和复数的模即可求解.

【详解】$\because z$为纯虚数，$\therefore$设$z=b\mathrm{i}, b\in\mathrm{R}$，$|z-2\mathrm{i}|=|b\mathrm{i}-2\mathrm{i}|=|(b-2)\mathrm{i}|=1$，

$\therefore (b-2)^2=1$，解得$b=3$或1，即$z=3\mathrm{i}$或$z=\mathrm{i}$.

故答案为：3i（答案不唯一）

12.【答案】$-\frac{7}{25}$##-0.28

【分析】由二倍角公式以及诱导公式即可求解.

【详解】由余弦的二倍角公式可得$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$,又

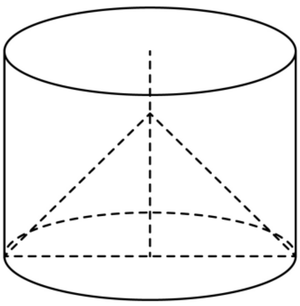
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha, \therefore \sin 2\alpha=-\frac{7}{25}$,

故答案为：$-\frac{7}{25}$

13.【答案】 ①. 33π ②. 54π

【分析】根据圆柱和圆锥的体积公式求木质工艺品的体积，根据圆柱、圆锥的侧面积公式求木质工艺品的表面积.

【详解】由题意可知：这个木质工艺品的体积为$V=V_{圆柱}-V_{圆锥}=9\pi\times 5-\frac{1}{3}\times 9\pi\times 4=33\pi$；



因为圆锥的母线长为$l=\sqrt{3^2+4^2}=5$

所以这个木质工艺品的表面积为$S=9\pi+2\pi\times 3\times 5+\pi\times 3\times 5=54\pi$.

故答案为：33π；54π.

14.【答案】 ①. 12 ②. $4\sqrt{7}$

【分析】(1）根据数量积的定义求解即可；

（2）利用向量的减法运算化简，再由数量积的运算法则求模即可.

【详解】由已知可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos 60^\circ=6\times4\times\frac{1}{2}=12$，

$\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)^2}$

$=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+4\overrightarrow{AC}^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{4^2+4\times6^2-4\times4\times6\times\cos 60^\circ}=4\sqrt{7}$.

故答案为：12； $4\sqrt{7}$

15.【答案】①③④

【分析】对于①：可证 $CD_1\perp$ 平面 AB_1C_1D，即可得结果；对于②：可证 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，即可得结果；对于③：分析可知 $N\in C_1D$，结合平面性质分析判断；对于④：结合 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1 分析可知：当 $P\in$ 平面 ACD_1 时，点 P 到直线 CD_1 的距离最小，结合长度关系分析求解.

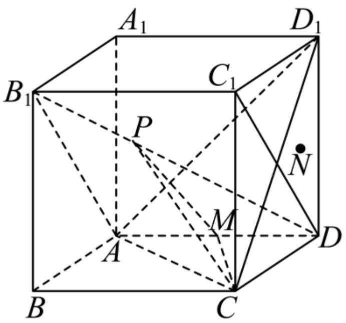
【详解】因为 $AD\parallel B_1C_1$，且 $AD=B_1C_1$，可知 AB_1C_1D 为平行四边形.

对于①：因为 DCC_1D_1 为正方形，则 $DC_1\perp CD_1$，

又因为 $AD\perp$ 平面 DCC_1D_1， $CD_1\subset$ 平面 DCC_1D_1，则 $AD\perp CD_1$，

且 $DC_1\cap AD$， $DC_1, AD\subset$ 平面 AB_1C_1D，

可得 $CD_1\perp$ 平面 AB_1C_1D，由 $MP\subset$ 平面 AB_1C_1D，则 $CD_1\perp MP$，故①正确；



对于②：由①可知： $CD_1\perp$ 平面 AB_1C_1D，由 $B_1D\subset$ 平面 AB_1C_1D，则 $CD_1\perp B_1D$，

同理可证： $AC\perp B_1D$，

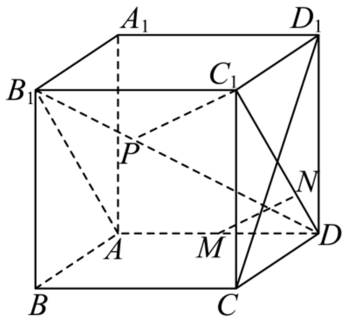
且 $AC\cap CD_1=C$， $AC, CD_1\subset$ 平面 ACD_1，可得 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，

又因为 $C\in$ 平面 ACD_1， $M\notin$ 平面 ACD_1，

可知平面 MPC 与平面 ACD_1 相交，

所以不存在点 P，使得 $B_1D\perp$ 平面 MPC，故②错误；

对于③：若 $C_1P//MN$，则 C_1, P, M, N 四点共面，即 $C_1, P, M, N\in$ 平面 AB_1C_1D，



又因为点 $N\in$ 侧面 DCC_1D_1，且侧面 $DCC_1D_1\cap$ 平面 $AB_1C_1D=C_1D$，则 $N\in C_1D$，

根据平面的性质可知：对任意 $N\in$ 线段 C_1D（不包括 C_1），均存在 $P\in B_1D$，使得 $C_1P//MN$，

所以存在无数组点 N 和点 P，使得 $C_1P//MN$，故③正确；

对于④：由②可知：$B_1D\perp$ 平面 ACD_1，

由垂线性质可知，当 $P\in$ 平面 ACD_1 时，点 P 到直线 CD_1 的距离最小，

又因为 $AD=CD=DD_1=2, AC=AD_1=CD_1=2\sqrt{2}$，

可知 $D-ACD_1$ 为正三棱锥，点 P 为等边 $\triangle ACD_1$ 的中心，

此时点 P 到直线 CD_1 的距离为 $\frac{1}{3}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以点 P 到直线 CD_1 的距离最小值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故④正确；

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：对于空间中动线问题的研究，常常有拓展的思路，把线转为面，研究线面问题，有助于理解判断.

三、解答题，共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $b=\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】(1) 由正弦定理转化为三角函数，由二倍角的正弦公式化简即可得解；

(2) 由高的关系得出边的关系，再由余弦定理求出 b，由面积公式求面积即可.

【小问 1 详解】

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可得，$\sin B\cdot\sin A-\sin A\cdot\cos\frac{B}{2}=0.$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$.

所以 $\sin B=\cos\frac{B}{2}$.

所以 $2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\cos\frac{B}{2}\neq 0$，

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 AB 边上的高是 BC 边上的高的 2 倍，$c=1$，

所以由等面积法知 $a=2c=2$，

所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=3$，

所以 $b=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17.【答案】（1）证明见解析；

（2）证明见解析；　（3） $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【分析】（1）令 $AC\cap BD=F$，由三角形中位线性质，线面平行的判定推理即得.

（2）利用线面垂直、面面垂直的判定推理即得.

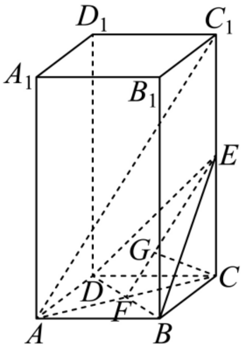
（3）过 C 作 $CG\perp EF$ 于 G，由（2）的结论，结合面面垂直的性质推理计算即得.

【小问 1 详解】

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，令 $AC\cap BD=F$，则 F 为 AC 中点，连接 EF，

由 E 为 CC_1 的中点，得 $EF//AC_1$，而 $AC_1\not\subset$ 平面 EDB， $EF\subset$ 平面 EDB，

所以 $AC_1//$ 平面 EDB.



【小问 2 详解】

由 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$， $BD\subset$ 平面 $ABCD$，得 $CC_1\perp BD$，

矩形 $ABCD$ 中， $AB=BC$，则矩形 $ABCD$ 为正方形， $AC\perp BD$，

而 $AC\cap CC_1=C, AC, CC_1\subset$ 平面 ACC_1，则 $BD\perp$ 平面 ACC_1，又 $BD\subset$ 平面 EDB，

所以平面 $EDB\perp$ 平面 ACC_1.

【小问 3 详解】

在$\triangle EFC$中，过C作$CG\perp EF$于G，由平面$EDB\perp$平面ACC_1，平面$EDB\cap$平面$ACC_1=EF$，$CG\subset$平面ACC_1，因此$CG\perp$平面EDB，显然$FC=\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{FC^2+EC^2}=\sqrt{6}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle EFC$中，$CG=\dfrac{FC\cdot EC}{EF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以点C到平面EDB的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

18.【答案】(1）$T=\pi$，单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathrm{Z})$；

（2）$\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

【分析】(1）利用辅助角公式化简，结合所选条件，利用周期与单调性求出ω，求函数解析式即可;

（2）由x的范围求出$2x+\dfrac{\pi}{3}$的范围，即可求出函数的值域，依题意$c\geq f\left(x\right)_{\max}$.

【小问 1 详解】

因为$f\left(x\right)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\omega x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

若选①②：由①函数$f(x)$的图象经过点$\left(-\dfrac{\pi}{6},2\right)$,

则$-\dfrac{\pi\omega}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，即$\omega=-1-12k$，$k\in\mathrm{Z}$，

由② $f(x)$在区间$\left[-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递增，有$\dfrac{\pi}{12}-\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\leq\dfrac{T}{2}$，即$T\geq\pi$，

又$\omega>0$且$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，即$\dfrac{2\pi}{\omega}\geq\pi$，所以$0<\omega\leq2$，此时$\omega$不存在；

选条件②③：由② $f(x)$在区间$\left[-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递增，有$\dfrac{\pi}{12}-\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)\leq\dfrac{T}{2}$，即$T\geq\pi$，

又$\omega>0$且$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，即$\dfrac{2\pi}{\omega}\geq\pi$，所以$0<\omega\leq2$，

由③ $x=\dfrac{\pi}{12}$是$f(x)$的一条对称轴，则$\dfrac{\pi}{12}\omega+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

所以$\omega=2+12k$，$k\in\mathrm{Z}$，所以$\omega=2$，

所以$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$f\left(x\right)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

由$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq2x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathrm{Z})$，解得$\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\dfrac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathrm{Z})$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$；

若选①③：由①函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{6},2\right)$，

则 $-\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in Z$， 即 $\omega=-1-12k$， $k\in Z$，

由③ $x=\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，则 $\frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in Z$，所以 $\omega=2+12k$， $k\in Z$，

此时 ω 不存在；

【小问 2 详解】

由（1）可知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$，

所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$， $f(x)\in\left[-2,\sqrt{3}\right]$，

因为对于任意的 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，都有 $f(x)\le c$，所以 $c\ge\sqrt{3}$，

即 c 的取值范围为 $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

19. 【答案】（1） $(0,1,1,1,1)$

（2） 3

（3） 3

【分析】（1）设 $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$，然后直接根据定义解得 y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 的值即可；

（2）根据已知条件考虑 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ 中所有等于1的分量的个数，得到 $k\le3$，再对 $k=3$ 构造符合条件的例子；

（3）直接通过反证法说明 $k=2$ 不可能成立，然后对 $k=3$ 构造符合条件的例子.

【小问 1 详解】

设 $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$，则由 $\alpha=(1,1,1,0,1)$， $\alpha*\beta=(0,1,1,0,1)$， 知

$(1\cdot y_1,1\cdot y_2,1\cdot y_3,0\cdot y_4,1\cdot y_5)=(0,1,1,0,1)$.

所以 $(y_1,y_2,y_3,0,y_5)=(0,1,1,0,1)$，得 $\beta=(0,1,1,y_4,1)$.

而 $|\beta|=4$，故 $0+1+1+y_4+1=4$，从而 $y_4=1$.

所以 $\beta=(0,1,1,1,1)$.

【小问 2 详解】

由已知有$\left|\alpha_i\right|=3\left(1\le i\le k\right)$，$\left|\alpha_i*\alpha_j\right|=0\left(1\le i<j\le k\right)$，

这些条件的含义是，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 都恰有3个分量等于1，且任意两个不同向量没有同时为1的分量.

由于 $\boldsymbol{n=9}$，故一共只有9个分量，这表明全体$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 的所有分量中，至多有9个1.

而显然一共有$3k$ 个1，故$3k\le 9$，得$k\le 3$.

显然$\alpha_1=\left(1,1,1,0,0,0,0,0,0\right)$，$\alpha_2=\left(0,0,0,1,1,1,0,0,0\right)$，$\alpha_3=\left(0,0,0,0,0,0,1,1,1\right)$满足条件，此时$k=3$.

这就说明k 的最大值是3.

【小问 3 详解】

由$\left|\alpha_0\right|=0$，$\left|\alpha_k\right|=n$，知$\alpha_0=\left(0,0,0,\ldots,0,0\right)$，$\alpha_k=\left(1,1,1,\ldots,1,1\right)$.

而条件$\left|\alpha_i\odot\alpha_{i+1}\right|=n-2\left(0\le i\le k-1\right)$的含义是，在序列$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$中，任意一对相邻的向量$\alpha_i,\alpha_{i+1}\left(0\le i\le k-1\right)$都恰有$n-2$个分量不相等.

根据题目内容，已有$k\ge 2$.

若$k=2$，则$\alpha_0=\left(0,0,0,\ldots,0,0\right)$，$\alpha_2=\left(1,1,1,\ldots,1,1\right)$，且$\alpha_0,\alpha_1$恰有$n-2$个分量不相等，$\alpha_1,\alpha_2$恰有$n-2$个分量不相等.

换言之，α_0,α_1恰有2个分量相等，α_1,α_2恰有2个分量相等.

而$n\ge 5$，故一定存在$1\le t\le n$，使得α_0,α_1的第t个分量不相等，α_1,α_2的第t个分量也不相等.

这就表明α_0,α_2的第t个分量相等，但$\alpha_0=\left(0,0,0,\ldots,0,0\right)$，$\alpha_2=\left(1,1,1,\ldots,1,1\right)$，它们没有相等的分量，矛盾；

这就表明$k\ge 3$.

注意到$\alpha_0=\left(0,0,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0\right)$，$\alpha_1=\left(0,1,0,1,1,1,\ldots,1,1,1,1\right)$，$\alpha_2=\left(1,1,0,0,0,0,\ldots,0,0,0,0\right)$，$\alpha_3=\left(1,1,1,1,1,1,\ldots,1,1,1,1\right)$满足全部条件，此时$k=3$.

所以k 的最小值是3.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于对新定义的理解，以及构造性地给出符合条件的例子.