2024北京中关村中学高二（上）开学考

数　学

一、单选题：本题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数$\frac{2i}{1-i}$（i是虚数单位）的虚部是（　）

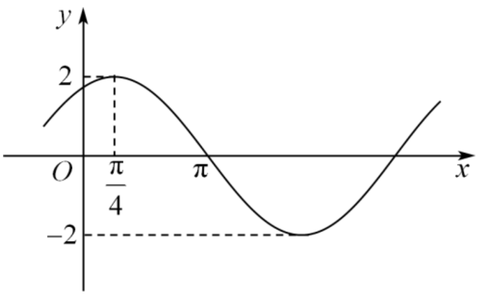
A. 1　　B. $-i$　　C. 2　　D. 2i

2. 已知$\vec{a}=(-5,5),\vec{b}=(0,-3)$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2}{3}\pi$　　D. $\frac{3}{4}\pi$

3. 已知函数$f\left(x\right)=A\cos\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则（　）



A. $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $\omega=\frac{4}{3}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=\frac{4}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

4. 已知$\cos a=\frac{4}{5}$，$a\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，则$\sin\frac{\alpha}{2}$等于（　）

A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{10}$　　D. $-\frac{3}{5}$

5. 若函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上单调递增，则$\omega$的取值范围是（　）

A. $\left(0,\frac{10}{3}\right]$　　B. $\left(0,\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$

6. 在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\angle B=30^{\circ}$，ΔABC的面积为$\dfrac{3}{2}$，且$\sin A+\sin C=2\sin B$，则b的值为(　　)

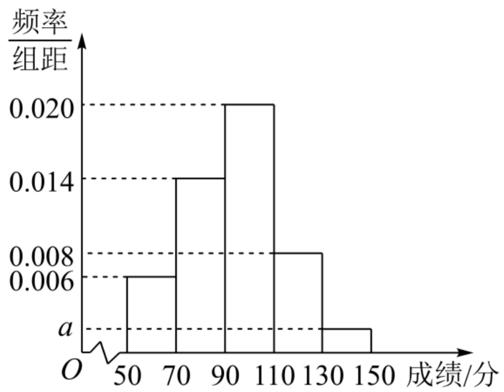
A. $4+2\sqrt{3}$　　B. $4-2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}+1$

7. 若$x,y\in\mathbf{R}$，则“$\lg x+\lg\left(y-1\right)=0$”是“$x(y-1)=1$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 为了解某地高三学生的期末语文考试成绩，研究人员随机抽取了100名学生对其进行调查，根据所得数据制成如图所示的频率分布直方图，已知不低于90分为及格，则这100名学生期末语文成绩的及格率为（　）



A. 40%　　B. 50%　　C. 60%　　D. 65%

9. “$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$”是“$\sin\alpha=\cos\beta$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 在$\triangle ABC$中，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$，$AB=BC=2$，已知点P满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{2}$，则$\lambda=$（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

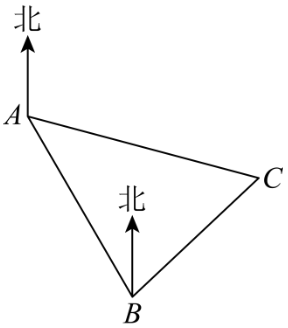
二、填空题：本题共6小题，每小题6分，共36分.

11. 已知复数z满足$\left|z\right|=1$，$\left|z-\mathrm{i}\right|=1$，则$z$的虚部为______.

12. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，则$\angle B$的大小是________.

13. $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c．若$b=6,\sin A=2\sin C,B=\dfrac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积为__________.

14. 如图，在某个海域，一艘渔船以60海里/时的速度，沿方位角为150°的方向航行，行至A处发现一个小岛C在其东偏南15°方向，半小时后到达B处，发现小岛C在其东北方向，则B处离小岛C的距离为_________海里.



15. 边长为2的等边$\triangle ABC$中，$|\overrightarrow{BD}|=1$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为________.

16. 如果存在函数$g(x)=ax+b$（a、b为常数），使得对函数$f(x)$定义域内任意x都有$f(x)\le g(x)$成立，那么称$g(x)$为函数$f(x)$的一个“线性覆盖函数”．给出如下四个结论：

①函数$f(x)=2^x$存在“线性覆盖函数”；

②对于给定的函数$f(x)$，其“线性覆盖函数”可能不存在，也可能有无数个；

③$g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$为函数$f(x)=\sqrt{x}$的一个“线性覆盖函数”；

④若$g(x)=2x+b$为函数$f(x)=-x^2$的一个“线性覆盖函数”，则$b>1$

其中所有正确结论的序号是___________

三、解答题：本题共4小题，共分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 已知函数$f(x)=a\sin x\cos x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$.

（1）求a的值和$f(x)$的最小正周期;

（2）求$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间.

18. 已知A，B，C分别为$\triangle ABC$三边a，b，c所对的角，向量$\vec{m}=(\sin A,\sin B)$，$\vec{n}=(\cos B,\cos A)$，且$\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin 2C$．

（1）求角C的大小;

（2）若$\sin A+\sin B=2\sin C$，且$\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=18$，求边$c$的长.

19. 在$\triangle ABC$中；内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.已知$b=2,\frac{\sin A+\sin B}{\sin B+\sin C}=\frac{c}{a-2}$.

（1）求角A.

（2）从以下三个条件中任选一个，求$\triangle ABC$的面积.

①边 BC 上的中线 $AD=1$；② $\sin B=\dfrac{1}{3}$；③角 A 的平分线 $AD=1$，点 D 在线段 BC 上.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

20. 对于函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$，若存在实数 m，n，使得函数 $h\left(x\right)=mf\left(x\right)+ng\left(x\right)$，则称 $h\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的“合成函数”.

（1）已知 $f\left(x\right)=x-3$，$g\left(x\right)=3-2x$，试判断 $h\left(x\right)=x-6$ 是否为 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的“合成函数”？若是，求实数 m,n 的值；若不是，说明理由；

（2）已知 $f\left(x\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(x\right)=\cos x$，$h\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的“合成函数”，且 $m=1$，$n=\sqrt{2}$，若关于 x 的方程 $f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot g\left(x\right)+kh\left(x\right)=0$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有解，求实数 k 的取值范围；

（3）已知 $f\left(x\right)=x$，$g\left(x\right)=\dfrac{3}{x}$，$h\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的“合成函数”（其中 $m>0$，$n>0$），$h\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，当且仅当 $x=3$ 时，$h\left(x\right)$ 取得最小值 6．若对任意正实数 x_1,x_2，且 $x_1+x_2=2$，不等式 $h\left(x_1\right)+h\left(x_2\right)\geq p$ 恒成立，求实数 p 的最大值.

参考答案

一、单选题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】A

【分析】利用复数的除法法则及复数的概念即可求解.

【详解】由题意可知，$\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{-2+2\mathrm{i}}{2}=-1+\mathrm{i}$，

所以复数$\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$的虚部为$1$.

故选：A.

2.【答案】D

【分析】分别求出$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积和模，代入夹角公式即得.

【详解】$\because |\vec{a}|=5\sqrt{2},|\vec{b}|=3,\vec{a}\cdot\vec{b}=-15$

$\therefore \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-15}{5\sqrt{2}\cdot 3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

又$\because \vec{a}$与$\vec{b}$的夹角范围为$[0,\pi]$

$\therefore \vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{3}{4}\pi$.

故选：D

3.【答案】A

【分析】根据函数的最大值为 2 求出 A，然后由$x=\frac{\pi}{4},x=\pi$间的距离求出周期，进而求出ω，最后根据最值点$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$求出$\varphi$.

【详解】根据函数的图象，A=2，$T=\frac{2\pi}{\omega}=4\times\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\omega=\frac{2}{3}$，所以$f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x+\varphi\right)$，根据函数在$x=\frac{\pi}{4}$处取得最大值可知，

$\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi(k\in\mathrm{Z})\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathrm{Z}),\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

4.【答案】B

【分析】根据余弦的二倍角公式，求解可得选项.

【详解】因为$\cos\alpha = 1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{4}{5}$，所以$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{10}$，

又$a\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，所以$\dfrac{\alpha}{2}\in(\dfrac{3\pi}{4}，\pi)$，所以$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

故选：B.

【点睛】本题考查余弦的二倍角公式，属于基础题.

5.【答案】B

【分析】求出函数的单调增区间，根据$\begin{cases}\dfrac{2k\pi}{\omega}-\dfrac{5\pi}{6\omega}\le -\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{6\omega}\ge \dfrac{\pi}{4}\end{cases},k\in Z$求解范围.

【详解】考虑函数函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，

令$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\omega x+\dfrac{\pi}{3}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$，

$2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}\le\omega x\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in Z,\omega>0$，

$\dfrac{2k\pi}{\omega}-\dfrac{5\pi}{6\omega}\le x\le\dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{6\omega},k\in Z$，

函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在区间$[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$上单调递增，

则$\begin{cases}\dfrac{2k\pi}{\omega}-\dfrac{5\pi}{6\omega}\le -\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{2k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{6\omega}\ge \dfrac{\pi}{4}\end{cases},k\in Z$，解得$\begin{cases}\omega\le\dfrac{10}{3}-8k\\ \omega\le\dfrac{2}{3}+8k\end{cases},k\in Z$，所以$k$=0，又$\omega>0$，

所以$\omega\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$

故选：B

【点睛】此题考查根据三角函数的单调性求解参数的取值范围，关键在于熟练掌握单调性的处理方法，准确求解不等式组.

6.【答案】D

【分析】

先根据三角形面积公式求得ac的值，利用正弦定理及题设中$\sin A+\sin C=2\sin B$，可知$a+c$的值，代入到余弦定理中求得b.

【详解】解：由已知可得：$\dfrac{1}{2}ac\sin 30^\circ=\dfrac{3}{2}$，解得：$ac=6$，

又$\sin A+\sin C=2\sin B$，由正弦定理可得：$a+c=2b$，

由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=(a+c)^2-2ac-\sqrt{3}ac=4b^2-12-6\sqrt{3}$，

解得：$b^2=4+2\sqrt{3}$，

$\therefore b=1+\sqrt{3}$．

故选：D．

【点睛】本题主要考查了余弦定理和正弦定理的应用，作为解三角形的常用定理，应用熟练记忆这两个定理及其变式，属于基础题.

7.【答案】A

【分析】根据充分条件和必要条件的定义结合对数的运算性质分析判断.

【详解】由$\lg x+\lg\left(y-1\right)=0$，得$\lg\left[x\left(y-1\right)\right]=0$，

所以$x(y-1)=1$，

当$x(y-1)=1$，且$x<0, y-1<0$时，$\lg x+\lg\left(y-1\right)=0$不成立，

所以“$\lg x+\lg\left(y-1\right)=0$”是“$x(y-1)=1$”的充分不必要条件，

故选：A

8.【答案】C

【分析】利用直方图求频率即得.

【详解】依题意可得及格率为$1-20\times\left(0.006+0.014\right)=0.6=60\%$.

故选：C.

9.【答案】A

【分析】由$\sin\alpha=\cos\beta$可解得$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$或$\beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$，即可判断.

【详解】若$\sin\alpha=\cos\beta$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta$，$\therefore\beta=2k\pi\pm\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right), k\in Z$，

即$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$或$\beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$，

则可得“$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in \mathrm{Z}$”是“$\sin\alpha=\cos\beta$”的充分而不必要条件.

故选：A.

10.【答案】D

【分析】利用余弦定理求出AC，求出$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，根据$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{2}$求解可得.

【详解】因为$\cos B=-\dfrac{1}{2}$，$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{2\pi}{3}$，

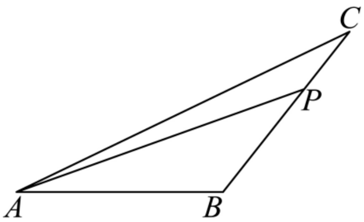
又 $AB = BC = 2$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\angle BAC = \frac{\pi}{6}$，

由余弦定理得 $AC = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2\times 2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$，

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6} = 6$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}^2 + (1-\lambda)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\lambda + 6(1-\lambda) = \frac{9}{2}$，解得 $\lambda = \frac{3}{4}$.

故选：D



二、填空题：本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分.

11.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】设 $z = a + b\mathrm{i}, a, b\in\mathrm{R}$，根据复数的模的计算公式求出 b 即可得解.

【详解】设 $z = a + b\mathrm{i}, a, b\in\mathrm{R}$，

由 $|z| = 1$，$|z-\mathrm{i}| = 1$，

得 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + (b-1)^2 = 1 \end{cases}$，解得 $b = \frac{1}{2}, a^2 = \frac{3}{4}$，

所以 z 的虚部为 $\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

12.【答案】$\frac{\pi}{3}$

【分析】由正弦定理可得 $a:b:c = 5:7:8$，令 $a = 5t\,(t>0)$，则 $b = 7t$ 、$c = 8t$，再由余弦定理计算可得.

【详解】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），

又 $\sin A:\sin B:\sin C = 5:7:8$，所以 $a:b:c = 5:7:8$，

令 $a = 5t\,(t>0)$，则 $b = 7t$ 、$c = 8t$，

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(5t)^2 + (8t)^2 - (7t)^2}{2\times 5t\times 8t} = \frac{1}{2}$，

又$B \in (0,\pi)$，所以$B = \dfrac{\pi}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{3}$

13.【答案】$6\sqrt{3}$

【分析】根据题意，结合正余弦定理，求出a和c，结合面积公式，即可求解.

【详解】根据题意，由$\sin A = 2\sin C$，根据正弦定理得$a = 2c$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$，

因为$b = 6$，$B = \dfrac{\pi}{3}$，$a = 2c$，所以$6^2 = a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 - \dfrac{1}{2} \times 2a \cdot \dfrac{a}{2}$，解得$a = 4\sqrt{3}$或$a = -4\sqrt{3}$（舍），故

$c = 2\sqrt{3}$，

因此$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = 6\sqrt{3}$.

故答案为：$6\sqrt{3}$.

14.【答案】$10\sqrt{6}$

【分析】根据题意得$\angle CAB = 45^\circ$，$\angle ACB = 60^\circ$，$AB = 30$，再利用正弦定理可得.

【详解】由题意及方位角可得，$\angle CAB = 45^\circ$，$\angle ABC = 75^\circ$，$\angle ACB = 60^\circ$，

因为渔船以60海里/时的速度航行，所以$AB = 30$海里，

由正弦定理可得$\dfrac{AB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 45^\circ}$，即$\dfrac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，得$BC = 10\sqrt{6}$海里，

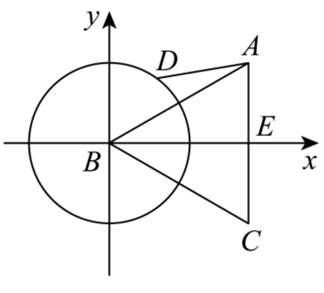
故答案为：$10\sqrt{6}$.

15.【答案】$-3-\sqrt{3}$.

【分析】以点B为坐标原点，$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{EA}$分别为x、y轴的正方向建立平面直角坐标系，设点$D(\cos\theta,\sin\theta)$，利用平面向量数量积的坐标运算以及余弦函数的有界性可求得$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$的最小值.

【详解】因为$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，且$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$，则$E$为$AC$的中点，故$BE \perp AC$，

以点B为坐标原点，$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{EA}$分别为x、y轴的正方向建立如下图所示的平面直角坐标系，



则$A(\sqrt{3},1)$、$E(\sqrt{3},0)$、$B(0,0)$，设点$D(\cos\theta,\sin\theta)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(\cos\theta-\sqrt{3},\sin\theta-1\right)$，

所以，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\sqrt{3}\left(\cos\theta-\sqrt{3}\right)\geq-\sqrt{3}-3$，当且仅当$\cos\theta=-1$时，等号成立，

因此，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为$-\sqrt{3}-3$.

故答案为：$-\sqrt{3}-3$.

16.【答案】②③

【详解】对①：由函数$f\left(x\right)=2^x$的图象可知，不存在“线性覆盖函数”故命题①错误

对②：如 f（x）=sinx，则 g（x）=B（B＜－1）就是“线性覆盖函数”，且有无数个，再如①中的函数$f\left(x\right)=2^x$就没有“线性覆盖函数”，∴命题②正确；

对③：设$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$，则$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$，

当$0<x<1$时，$h'(x)>0,h(x)$在（0，1）单调递增

当$x>1$时，$h'(x)<0,h(x)$在$(1,+\infty)$单调递减

$\therefore h(x)\leq h(1)=0$，即$f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$

$g\left(x\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$为函数$f\left(x\right)=\sqrt{x}$的一个“线性覆盖函数”；命题③正确

对④，设$F(x)=-x^2-2x-b$，则$F(x)=-(x+1)^2+1-b$，当 b=1 时，$g\left(x\right)=2x+b$也为函数$f\left(x\right)=-x^2$的一个“线性覆盖函数”，故命题④错误

故答案为②③

三、解答题：本题共 4 小题，共分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【答案】(1) $a=4$，$T=\pi$；

(2) $\left[0,\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

【分析】(1) 根据$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$求出$a$，然后利用三角恒等变换公式化简，由周期公式可得；

(2) 利用整体代入法求出$f\left(x\right)$的单调递增区间，结合$x\in\left[0,\pi\right]$可得.

【小问 1 详解】

因为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$，所以$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$，

即$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，解得$a=4$，

所以 $f\left(x\right)=4\sin x\cos x+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

$=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问 2 详解】

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

18.【答案】（1）$C=\frac{\pi}{3}$

（2）$c=6$

【分析】（1）利用数量积的坐标运算及三角公式化简整理可得角 C 的大小；

（2）将 $\sin A+\sin B=2\sin C$ 中的角化边，再将 $\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=18$ 用三角形的边角表示出来，然后利用余弦定理求出边 c 的长.

【小问 1 详解】

由已知得 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin\left(A+B\right)$.

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin\left(A+B\right)=\sin\left(\pi-C\right)=\sin C$，

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin C$.

又 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sin 2C$，所以 $\sin 2C=2\sin C\cos C=\sin C$，

$\because 0<C<\pi$，则 $\sin C\neq 0$

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$. 又 $0<C<\pi$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

由已知 $\sin A+\sin B=2\sin C$ 及正弦定理得 $2c=a+b$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=18$，所以 $ab\cos C=18$，所以 $ab=36$.

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=\left(a+b\right)^2-3ab$，

所以$c^2=4c^2-3\times36$，所以$c^2=36$，

所以$c=6$.

19.【答案】(1) $\frac{2\pi}{3}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 先利用正弦定理化简得$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c}{a-2}$，可化简得到$a^2-c^2=2c+4$，再结合余弦定理即可求解；

(2) 若选①：由题意可得$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，化简后可求得$c=2$，再结合正弦定理的面积公式即可求解；若选②：先利用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$化简求得$a=3\sqrt{3}$，再结合余弦定理可求得$c=2\sqrt{6}-1$，再结合正弦定理的面积公式即可求解；若选③:由余弦定理求得$CD=\sqrt{3}$且$AC^2+CD^2=AC^2$，从而可求得$\triangle ABC$为等腰三角形，从而可求解.

【小问1详解】

由题意$\frac{\sin A+\sin B}{\sin B+\sin C}=\frac{c}{a-2}$，由正弦定理可得$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c}{a-2}$，即$\frac{a+2}{2+c}=\frac{c}{a-2}$，

则$a^2-c^2=2c+4$，

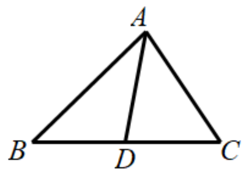
由余弦定理得$a^2=4+c^2-4c\cos A$，所以$a^2-c^2=4-4c\cos A$，

所以$2c+4=4-4c\cos A$，所以$\cos A=-\frac{1}{2}$，

又因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问2详解】

若选①：由边BC边上的中线$AD=1$，如图，



所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，即$1^2=\frac{1}{4}\left(c^2+4-2c\right)$，

即$c^2-2c=0$，又因为$c>0$，所以$c=2$，

由（1）知$\cos A=-\frac{1}{2}$，所以$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

若选②：当$\sin B=\dfrac{1}{3}$，由$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\frac{1}{3}}$，解得$a=3\sqrt{3}$，

由（1）可得$a^2-c^2=2c+4$，即$c^2+2c-23=0$，解得：$c=2\sqrt{6}-1$或$c=-1-2\sqrt{6}$（舍），

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times\left(2\sqrt{6}-1\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

若选③:角 A 的平分线$AD=1$，则$\angle DAC=\dfrac{\pi}{3}$，又因为$b=2$，

在$\triangle ADC$中由余弦定理可得$CD^2=b^2+AD^2-2b\cdot AD\cos\angle DAC=4+1-4\cos\dfrac{\pi}{3}$，

所以$CD=\sqrt{3}$，此时$AD^2+CD^2=AC^2$，所以$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，所以$AD\perp BC$，

所以可得$\triangle ABC$为等腰三角形，所以$c=b=2$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$.

20.【答案】(1）是，$m=3,n=1$

（2）$k\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

（3）20

【分析】(1）根据“合成函数”的定义计算即可；

（2）由题意可得$h(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$，则$f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot g(x)+kh(x)=0$，

即$\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}k(\sin x+\cos x)=0$，令$t=\sin x+\cos x$，则方程转化为关于$t$的一元二次方程，分离参数，进而可得出答案；

（3）求得$h(x)=mx+\dfrac{3n}{x}$，根据已知结合基本不等式求出m,n，从而可求出$h(x)$的解析式，再利用基本不等式求出$h(x_1)+h(x_2)$的最大值即可得解.

【小问 1 详解】

假设$h(x)=x-6$为$f(x)$，$g(x)$的“合成函数”，

则$h(x)=x-6=m(x-3)+n(3-2x)=(m-2n)x+3(n-m)$，

所以$\begin{cases}m-2n=1\\3(n-m)=-6\end{cases}$，解得$m=3,n=1$，

所以 $h(x)=x-6$ 为 $f(x)$，$g(x)$ 的“合成函数”，且 $m=3,n=1$；

【小问 2 详解】

因为 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，且 $m=1$，$n=\sqrt{2}$，

所以 $h(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$，

由 $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot g(x)+kh(x)=0$，

得 $\sin x\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}k(\sin x+\cos x)=0$（*），

令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

则 $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$，所以 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，故 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，

所以方程（*）为 $\frac{t^2-1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}kt=0$ 在 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上有解，

所以 $\sqrt{2}k=\frac{1}{t}-t$，

因为函数 $y=\frac{1}{t},y=-t$ 在 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上都是减函数，

所以函数 $y=\frac{1}{t}-t$ 在 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上是减函数，

所以 $\sqrt{2}k=\frac{1}{t}-t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2},0\right]$，

所以 $k\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$；

【小问 3 详解】

由题意 $h(x)=mx+\frac{3n}{x},m>0,n>0,x\in(0,+\infty)$，

得 $h(x)=mx+\frac{3n}{x}\geq 2\sqrt{3mn}$，

当且仅当 $mx=\frac{3n}{x}$，即 $x=\sqrt{\frac{3n}{m}}$ 时取等号，

所以$\begin{cases} m>0 \\ n>0 \\ \sqrt{\dfrac{3n}{m}}=3 \\ 2\sqrt{3mn}=6 \end{cases}$，解得$\begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$，

所以$h(x)=x+\dfrac{9}{x}, x\in(0,+\infty)$，

则$h(x_1)+h(x_2)=x_1+x_2+\dfrac{9}{x_1}+\dfrac{9}{x_2}\geq p$恒成立，

因为$x_1+x_2=2$，所以$h(x_1)+h(x_2)=x_1+x_2+\dfrac{9}{x_1}+\dfrac{9}{x_2}=2+\dfrac{18}{x_1x_2}\geq p$，

又$x_1x_2\leq\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}=1$，当且仅当$x_1=x_2=1$时取等号，

所以$h(x_1)+h(x_2)=2+\dfrac{18}{x_1x_2}\geq 20$，

所以$p\leq 20$，

所以实数p的最大值为20.

【点睛】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：“一正二定三相等”（1）“一正”就是各项必须为正数；（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.