2024北京延庆高三9月月考

数　学

2024.09

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x\,|\,0<x<1\}$，则$\complement_U A=$

（A）$(1,3)$　　（B）$(-3,0)\cup(1,3)$

（C）$(-3,0)$　　（D）$(-3,0]\cup[1,3)$

（2）在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(a,1)$，且满足$(1-\mathrm{i})\cdot z=2$，则$a=$

（A）1　　（B）-1

（C）2　　（D）-2

（3）下列函数中，是奇函数且在定义域内是减函数的是

（A）$y=\dfrac{1}{x}$　　（B）$y=-x^3$

（C）$y=x|x|$　　（D）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

（4）若$a<b<0$，$c>d>0$，则一定有

（A）$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$　　（B）$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$

（C）$\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$　　（D）$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$

（5）若$0<a<1$，则

（A）$a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{2}}$　　（B）$2^a<3^a$

（C）$\log_a\dfrac{1}{2}>\log_a\dfrac{1}{3}$　　（D）$\sin a>\cos a$

（6）已知函数$f(x)=\dfrac{1-4^x}{2^x}$，则$f(x)$

（A）图象关于y轴对称，且在$[0,+\infty)$上是增函数

（B）图象关于y轴对称，且在$[0,+\infty)$上是减函数

（C）图象关于原点对称，且在$[0,+\infty)$上是增函数

（D）图象关于原点对称，且在$[0,+\infty)$上是减函数

（7）已知函数$f(x)=3\log_2 x-2(x-1)$，则不等式$f(x)>0$的解集是

（A）$(1,4)$　　（B）$(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

（C）$(0,1)\cup(4,+\infty)$　　（D）$(0,4)$

（8）设已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列结论错误的是

（A）$a_2=2$　　（B）$a_4-a_3=2$

（C）$\{a_{2n}\}$是等比数列　　（D）$a_{2n-1}+a_{2n}=2^{n+1}$

（9）设函数$f(x)=x+\dfrac{m}{x-2}\ (m\in\mathbf{R})$的定义域为$(-1,2)$，则“$-3<m\leqslant 0$”是“$f(x)$在区间$(-1,2)$内有且仅有一个零点”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）在$\triangle ABC$中，$AB=AC=4\sqrt{2}$，当$\lambda\in\mathbf{R}$时，$|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}|$的最小值为$4$．若$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AP}=\sin^2\theta\,\overrightarrow{AB}+\cos^2\theta\,\overrightarrow{AC}$，其中$\theta\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$，则$|\overrightarrow{MP}|$的最大值为

（A）2　　（B）4

（C）$2\sqrt{5}$　　（D）$4\sqrt{2}$

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\lg x$的定义域是_________.

（12）把函数$f(x)=8^x$的图象上各点的横坐标扩大到原来的3倍，得到的图象对应的函数解析式是$y=$_________.

（13）已知函数$f(x)=x+\dfrac{2}{x}$在$[a,+\infty)$存在最小值3，则满足题意的$a=$_________.

（14）若函数$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$存在最小值，则$m$的一个取值为_________；$m$的最大值为_________.

（15）函数$f(t)=0.03\sin(1\,000\pi t)+0.02\sin(2\,000\pi t)+0.01\sin(3\,000\pi t)$的图象可以近似表示某音叉的声音图象.给出下列四个结论：

① $\frac{1}{500}$ 是函数 $f(t)$ 的一个周期；

② $f(t)$ 的图象关于直线 $t=\frac{1}{500}$ 对称；

③ $f(t)$ 的图象关于点 $(\frac{1}{500},0)$ 对称；

④ $f(t)$ 在 $\left[-\frac{1}{6\,000},\frac{1}{6\,000}\right]$ 上单调递增.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（16）（本小题 13 分）

已知 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1=16$，$2a_3+3a_2=32$.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设 $b_n=3\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，并求 S_n 的最大值.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x(0<\omega<2)$，再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，

（I）求 $f(x)$ 的解析式；

（II）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\le m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

条件①：函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{3},2)$；

条件②：函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到；

条件③：函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\sin x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值.

（19）（本小题 14 分）

为弘扬中华优秀传统文化，营造良好的文化氛围，增强文化自觉和文化自信，某区组织开展了中华优秀传统文化知识竞答活动，该活动有单人赛和 PK 赛，每人只能参加其中的一项. 据统计，中小学生参与该项知识竞答活动的人数共计 4.8 万，其中获奖学生情况统计如下：

奖项 组别	单人赛			PK 赛
	一等奖	二等奖	三等奖	获奖
中学组	40	40	120	100
小学组	32	58	210	100

（I）从获奖学生中随机抽取1人，若已知抽到的学生获得一等奖，求抽到的学生来自中学组的概率；

（II）从中学组和小学组获奖者中各随机抽取1人，以 X 表示这 2 人中 PK 赛获奖的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（III）从获奖学生中随机抽取 3 人，设这 3 人中来自中学组的人数为 ξ，来自小学组的人数为 η，试判断 $D(\xi)$ 与 $D(\eta)$ 的大小关系.（结论不要求证明）

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}$ $(a>0)$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $f(x)\leqslant x-\dfrac{1}{a}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（III）若 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0$ $(x_1\neq x_2)$，证明：$x_1+x_2>2$.

（21）（本小题 15 分）

已知数列 $\{a_n\}(n=1,2,\cdots,2022)$， $a_1,a_2,\cdots a_{2022}$ 为从 1 到 2022 互不相同的整数的一个排列，设集合 $A=\{x\,|\,x=\sum\limits_{i=1}^{j}a_{n+i},n=0,1,2,\cdots2022-j\}$, A 中元素的最大值记为 M ,最小值记为 N .

（I）若数列 $\{a_n\}$ 为:1，3，5，…，2019，2021，2022 ，2020，2018，…，4，2,且 $j=3$，

写出 M，N 的值；

（II）若 $j=3$，求 M 的最大值及 N 的最小值；

（III）若 $j=6$，试求 M 的最小值.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）D　（2）A　（3）B　（4）C　（5）B

（6）**D**　（7）A　（8）D　（9）A　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$\{x\,|\,x>0,\text{且}\,x\neq 1\}$　（12）2^x　（13）2

（14）0（第一空不唯一，区间$[0,4]$上任意值都可以），4

（注：第一空 2 分，第二空 3 分）

（15）①③④　**（注：对一个 2 分，对 2 个 4 分，对 3 个 5 分）**

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）(本小题 13 分)

解：(I) 设$\{a_n\}$的公比为q，因为$a_1=16, 2a_3+3a_2=32$，

所以$2q^2+3q-2=0$.　………2 分

解得$q=-2$（舍去）或$q=\dfrac{1}{2}$.　………4 分

因此$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=16\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}=2^{5-n}$.　………6 分

(II) 由 (I) 得$b_n=3(5-n)\log_2 2=15-3n$，　………7 分

当$n\geqslant 2$时，$b_n-b_{n-1}=-3$，　………8 分

故$\{b_n\}$是首项为$b_1=12$，公差为-3的单调递减等差数列.　………9 分

则$S_n=12n+\dfrac{1}{2}n(n-1)(-3)=-\dfrac{3}{2}(n^2-9n)$.　………10 分

又$b_5=0$，所以数列$\{b_n\}$的前 4 项为正数，

所以当$n=4$或5时，S_n取得最大值，且最大值为$S_4=S_5=30$.　………13 分

（17）(本小题 14 分)

(I) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x=2\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})$.　………2 分

选条件①：函数$f(x)$的图象经过点$(\dfrac{\pi}{3},2)$.　………3 分

则$f(\dfrac{\pi}{3})=2\sin(\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=2$.

即$\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.　………5 分

所以$\omega=3k+1$.　………6 分

因为$0<\omega<2$，

所以$\omega=1$.　　　　　　　　………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.　　　　　　　　………8 分

条件②：函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到….3 分

因为函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象平移得到，

所以函数 $f(x)$ 的周期与函数 $g(x)$ 的周期相同.

因为函数 $g(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.　　　　　　　　………6 分

则 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.　　　　　　　　………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.　　　　　　　　………8 分

选条件③：函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$. ……3 分

因为函数 $f(x)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$.　　　　　　　　………6 分

则 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$.　　　　　　　　………7 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.　　　　　　　　………8 分

（II） 因为关于 x 的不等式 $f(x)\le m$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值不大于 m 即可.

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$.

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 1$.　　　　　　　　………11 分

所以 $-1\le 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le 2$，即 $-1\le f(x)\le 2$.

当且仅当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2.　　……13 分

所以 $m\ge 2$.　　　　　　　　………14 分

所以实数 m 的取值范围为$[2,+\infty)$.

（18）(本小题 14 分)

（I）由题意得， $f'(x)=\frac{1}{x}+\cos x$，

所以 $f'(1)=1+\cos1$， ………2 分

又 $f(1)=\sin1$， ………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程

为 $y-\sin1=(1+\cos1)(x-1)$，

即 $y=(1+\cos1)x+\sin1-\cos1-1$； ………5 分

（II）因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\cos x$，

因为 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=\cos x$ 均在区间因为$[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

所以 $f'(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

因为 $f'(1)=1+\cos1>0$， ………6 分

$f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}+\cos\mathrm{e}<\frac{1}{\mathrm{e}}+\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}<0$， ………7 分

所以 $f'(x)=0$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上有且只有一个零点，记为 x_0， ………8 分

所以 $x\in[1,x_0)$ 时， $f'(x)>0$； ………9 分

$x\in(x_0,\mathrm{e}]$ 时， $f'(x)<0$， ………10 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,x_0)$ 上单调递增， ………11 分

在区间 $(x_0,\mathrm{e}]$ 上单调递减. ………12 分

因为 $f(1)=\sin1, f(\mathrm{e})=1+\sin\mathrm{e}$， ………13 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的最小值为 $\sin1$. ………14 分

注：学生如果用其他方法，按步骤给分

（19）（本小题 14 分）

（I）方法一：从表格中可知：获奖学生总数为： $40+40+120+100+32+58+210+100=700$ 人，获得一等奖的 $40+32=72$ 人，

记事件 A 为“从获奖学生中随机抽取1人，抽到的学生获得一等奖”，则 $P(A)=\frac{72}{700}$，

记事件 B 为“从获奖学生中随机抽取1人，抽到的学生来自中学组”，

则 $A\cap B$ 为“从获奖学生中随机抽取1人，抽到的学生获得一等奖且来自中学组”，$P(A\cap B)=\dfrac{40}{700}$，因此

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{40}{700}}{\frac{72}{700}}=\frac{5}{9}.$$ ………4 分

从获奖学生中随机抽取1人，若获得一等奖，抽到的学生来自中学组的概率为 $\dfrac{5}{9}$.

注：学生如果用其他方法，按步骤给分

（II）X 的取值范围是 $\{0,1,2\}$.

记事件 C 为“从中学组获奖者中取1人，该人是PK赛获奖”，

事件 D 为“从小学组获奖者中取1人，该人是PK赛获奖”，

中学组获奖者有 $40+40+120+100=300$，其中PK赛获奖的人数为 100，

小学组获奖者有 $32+58+210+100=400$，其中PK赛获奖的人数为 100，

$$P(C)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3},P(\overline{C})=\frac{2}{3};P(D)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4},P(\overline{D})=\frac{3}{4}.$$ ………6 分

由题意知，事件 C，D 相互独立，

所以 $P(X=0)=P(\overline{C}\cdot\overline{D})=(1-\dfrac{1}{3})\cdot(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$； ………7 分

$$P(X=1)=P(C\overline{D}\cup\overline{C}D)=P(C)P(\overline{D})+P(\overline{C})P(D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}\ \frac{5}{12};$$ ………8 分

$$P(X=2)=P(CD)=P(C)\cdot P(D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$ ………9 分

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

X 的数学期望

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{5}{12}+2\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{12}.$$ ………11 分

（III）$D(\xi)=D(\eta)$. ………14 分

（20）（本小题15分）

（I）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. ………1 分

由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}$ 得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{ax^2}$. ………2 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}$. ………3 分

因为 $a>0$，所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$. ………5 分

（II）由 $a>0$，依题意，$\ln x-ax^2+x\leqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x)=\ln x-ax^2+x$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+1=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}$．　　　　………6 分

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}<0$（舍），$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}>0$．

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

故 $g(x)_{\max}=g(x_2)=\ln x_2-ax_2^{\ 2}+x_2$．　　　　………8 分

又由 $g'(x_2)=0$ 得 $ax_2^{\ 2}=\dfrac{x_2+1}{2}$．

所以 $g(x_2)=\ln x_2-\dfrac{x_2+1}{2}+x_2=\ln x_2+\dfrac{x_2-1}{2}$．

依题意需 $g(x)_{\max}\leqslant 0$，即 $\ln x_2+\dfrac{x_2-1}{2}\leqslant 0$．

设 $h(t)=\ln t+\dfrac{t-1}{2}$，则易知 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数.　　………10 分

又 $h(1)=0$，

所以对任意的 $t\in(0,1]$，有 $h(t)\leqslant 0$；对任意的 $t\in(1,+\infty)$，有 $h(t)>0$．

所以 $0<x_2\leqslant 1$，即 $0<\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\leqslant 1$，解得 $a\geqslant 1$．

所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$．　　　　………11 分

（III）由 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0\ (x_1\neq x_2)$ 得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}=0$，且 $x_1\neq 1, x_2\neq 1$．………12 分

由（II）知，当 $a=1$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.　………13 分

所以 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}<x_1-1$，$\dfrac{\ln x_2}{x_2}<x_2-1$．　　　　………14 分

两式相加得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}<x_2+x_1-2$，即 $x_1+x_2-2>0$．　　………15 分

故 $x_1+x_2>2$．

注：学生如果用其他方法，按步骤给分

（21）(本小题 15 分）

（I）$M=6063$，$N=9$．　　　　……… 4 分

（II）N 最小值为 6，M 的最大值 6063.

证明：对于 1，2，…，2021，2022 的一个排列 $\{a_n\}$，

若 $j=3$，则 A 中的每一个元素为 $x=\sum_{i=1}^{3}a_{n+i}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，$n=0,1,2,...,2019$，

由题意 $M=\max(\sum_{i=1}^{3}a_{n+i})$，$n=0,1,2,\cdots,2019$，

那么，对于任意的 $\{a_n\}$，总有 $M\leqslant 2020+2021+2022=6063$.

同理，由题意 $N=\min(\sum_{i=1}^{3}a_{n+i})$，$n=0,1,2,\cdots,2019$，

那么，对于任意的 $\{a_n\}$，总有 $N\geqslant 1+2+3=6$，　　　………… 8 分

当 $a_n=n$ ($n=1, 2, \cdots, 2022$) 时，满足: $N=6$，$M=6063$.　……… 9 分

（III）M 的最小值为 6069.

由于 $j=6$，对于 1，2，……，2021，2022 的一个排列 $\{a_n\}$，

A 中的每一个元素为 $x=\sum_{i=1}^{6}a_{n+i}$，$n=0,1,2,...,2016$，

由题意 $M=\max(\sum_{i=1}^{6}a_{n+i})$，$n=0,1,2,\cdots,2016$，

对于任意的 $\{a_n\}$，都有

$\frac{2022}{6}M\geqslant 1+2+\cdots+2022$，

即 $\frac{2022}{6}M\geqslant\frac{2023\times 2022}{2}$，$M\geqslant 6069$.　　　………… 11 分

构造数列 $\{a_n\}$：$a_{2n}=n$，$n=1,2,\cdots,1011$，$a_{2n-1}=2023-n$，$n=1,2,\cdots,1011$，

对于数列 $\{a_n\}$，设任意相邻 6 项的和为 T，则

$T=a_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+a_{2n+4}$，或 $T=a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+a_{2n+4}+a_{2n+5}$

若 $T=a_{2n-1}+a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+a_{2n+4}$，则

$T=(n+(n+1)+(n+2))+((2023-n)+(2023-n-1)+(2023-n-2))$

$=2023\times 3=6069$，$n=1,2,\cdots,1009$

若 $T=a_{2n}+a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+a_{2n+4}+a_{2n+5}$，则

$T=(n+(n+1)+(n+2))+((2023-n-1)+(2023-n-2)+(2023-n-3))$

$=2022\times 3=6066$，（$n=1,2,\cdots,1008$）

所以 $T\leqslant 6069$，即对这样的数列 $\{a_n\}$，$M=6069$，

又 $M\geqslant 6069$，所以 M 的最小值为 6069 .　　　………… 15 分