2024北京一六六中高三9月月考

数　学

（考试时长：150分钟）

班级：______________ 姓名：______________

考查目标
知识：预备知识，函数，导数，三角函数，数列，概率统计，解析几何 **能力：空间想象能力、抽象概括能力、运算求解能力、推理论证能力、数据处理能力、数学建模能力**

1．已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{x\middle|x^2<2\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-2,-1,0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1\}$

C．$\{2,-2\}$　　D．$\{0,1\}$

2．若 $a<b$ 且 $ab\neq 0$，则下列不等式中一定成立的是（　）

A．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B．$\frac{b}{a}>1$　　C．$a^3<b^3$　　D．$|a|<|b|$

3．双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的离心率为 2，则其渐近线方程为（　）

A．$y=\pm\sqrt{2}x$　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　C．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　D．$y=\pm 2x$

4. 下列函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A．$f(x)=\frac{1}{|x|}$　　B．$f(x)=\sin|x|$

C．$f(x)=2^x+2^{-x}$　　D．$f(x)=\tan x$

5．在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边与单位圆交于点 $P\left(x_0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$（　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\pm\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

6．小王同学进行投篮练习，若他第1球投进，则第2球投进的概率为 $\frac{2}{3}$；若他第1球投不进，则第2球投进的概率为 $\frac{1}{3}$.若他第1球投进概率为 $\frac{2}{3}$，他第2球投进的概率为（　）

A．$\frac{5}{9}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$\frac{8}{3}$

7．已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷项等比数列，S_n 为其前 n 项的和，“$S_1>0$，且 $S_2>0$”是“$\forall n\in \mathrm{N}^*$，总有 $S_n>0$”的（　）

A．充分而不必要条件　　　　　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　　　　　　　D．既不必要又不充分条件

8．近年来纯电动汽车越来越受消费者的青睐，新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口. Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位：Ah），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位：A）之间关系的经验公式：$C=I^{n}\cdot t$，其中 n 为 Peukert 常数.为测算某蓄电池的 Peukert 常数 n，在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=20\text{A}$ 时，放电时间 $t=20\text{h}$；当放电电流 $I=50\text{A}$ 时，放电时间 $t=5\text{h}$.若计算时取 $\lg 2\approx 0.3$，则该蓄电池的 Peukert 常数 n 大约为（　）

A．1.25　　　B．1.5　　　C．1.67　　　D．2

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\ge a\\ -x^2-2x, x<a\end{cases}$ 则下列结论错误的是（　）

A．存在实数 a，使函数 $f(x)$ 为奇函数；

B．对任意实数 a 和 k，函数 $y=f(x)+k$ 总存在零点；

C．对任意实数 a，函数 $f(x)$ 既无最大值也无最小值；

D．对于任意给定的正实数 m，总存在实数 a，使函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,m)$ 上单调递减.

10．设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，若 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=2$ 时，$\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.则下列选项正确的是（　）

A．函数 $f(x)$ 的周期为 $\frac{\pi}{3}$

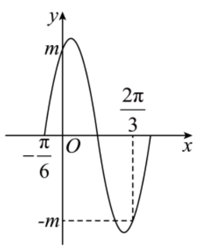
B．将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到的函数为奇函数

C．当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

D．方程 $f(x)=0$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的根的个数共有 6 个

11．已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5},\alpha$ 是第一象限角，且角 α,β 的终边关于 y 轴对称，则 $\tan\beta=$___________

12．若函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 φ 的值是___________



13．数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列，则 $a_1=$____；$S_n=$____.

14．过抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，若弦 AB 中点纵坐标为 2，则 $|AB|=$____.

15．斐波那契数列又称为黄金分割数列，在现代物理、化学等领域都有应用，斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\left(n\geq 3,n\in\mathrm{N}^*\right)$.给出下列四个结论：

①存在 $m\in\mathrm{N}^*$，使得 a_m,a_{m+1},a_{m+2} 成等差数列；

②存在 $m\in\mathrm{N}^*$，使得 a_m,a_{m+1},a_{m+2} 成等比数列；

③存在常数 t，使得对任意 $n\in\mathrm{N}^*$，都有 a_n,ta_{n+2},a_{n+4} 成等差数列；

④存在正整数 $i_1,i_2,\cdots,i_m$，且 $i_1<i_2<\cdots<i_m$，使得 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_m}=2023$.

其中所有正确结论的序号是____.

16. 已知函数 $f(x)=\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+3\cos x\right)-a$ 的图像经过点 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$.

(1) 求实数 a 的值，并求 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)\geq m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

17．设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，已知 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leq f\left(\frac{\pi}{12}\right)$，$f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在.

(1) 求 ω,φ 的值；

(2) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m$ 恰有一个公共点，求 m 的取值范围.

条件①：$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心；

条件②：直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

条件③：函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象平移得到.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18．某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同险期限届满的保单中随机抽取 1000 份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为 0.4 万元；前 3 次索赔时，保险公司每次赔偿 0.8 万元；第四次索赔时，保险公司赔偿 0.6 万元.假设不同保单的索赔次数相互独立.用频率估计概率.

(1)估计一份保单索赔次数不少于 2 的概率；

(2)一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差.

（i）记 X 为一份保单的毛利润，估计 X 的数学期望 $E\left(X\right)$；

（ii）如果无索赔的保单的保费减少 4%，有索赔的保单的保费增加 20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中 $E\left(X\right)$ 估计值的大小.（结论不要求证明）

19．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左顶点为 $A\left(-2,0\right)$，上下顶点为 B_1，B_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程

(2)设 P 点是椭圆 C 上一点，不与顶点重合，M 满足四边形 PB_1MB_2 是平行四边形，过点 P 作垂直 y 轴的直线交直线 AB_1 于点 Q，再过 Q 作垂直于 x 轴的直线交直线 PB_2 于点 N .求证：A，M，N 三点共线.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x+a)^2}$，其中 a 为常数.

（1）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（3）若 $a=-1$，求函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的极值点的个数.

21. 已知数列 A_n：a_1，a_2，…，a_n .如果数列 B_n：b_1，b_2，$\cdots$，b_n 满足 $b_1=a_n$，$b_k=a_{k-1}+a_k-b_{k-1}$，其中 $k=2,3,\cdots,n$，则称 B_n 为 A_n 的"衍生数列".

(1)若数列 A_4：a_1，a_2，a_3，a_4 的"衍生数列"是 B_4：5，-2，7，2，求 A_4；

(2)若 n 为偶数，且 A_n 的"衍生数列"是 B_n，证明：B_n 的"衍生数列"是 A_n；

(3)若 n 为奇数，且 A_n 的"衍生数列"是 B_n，B_n 的"衍生数列"是 C_n，…依次将数列 A_n，B_n，C_n，…第 i（$i=1,2,\cdots,n$）项取出，构成数列 Ω_i：a_i，b_i，c_i….求证：Ω_i 是等差数列.