2024 北京景山学校高三（下）开学考

数　学

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

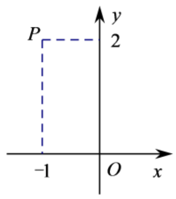
1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2\le 2\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-2,2,3\}$　　C. $\{-2,-1,2\}$　　D. $\{-2,0,3\}$

2. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中，常数项为（　）

A. -24　　B. 24　　C. -48　　D. 48

3. 如图，在复平面内，复数 z 对应的点为 P，则复数 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部为（　）



A. $-\mathrm{i}$　　B. 1

C. i　　D. -1

4. 若 $a>b$，则（　）

A. $a^3<b^3$　　B. $\dfrac{b}{a}<1$　　C. $0.2^{a-b}<1$　　D. $|a|>|b|$

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 在该抛物线上，且 P 的横坐标为 4，则 $|PF|=$（　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 为非零向量，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则“$|\vec{a}+\vec{b}|\ge 3$”是“存在实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$”成立的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知点 $O(0,0)$，点 P 满足 $|PO|=1$，则点 P 到直线 $x-my-2=0$ 的距离的最大值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 庑殿（图 1）是中国古代传统建筑中的一种屋顶形式，多用于宫殿、坛庙、重要门楼等高级建筑上，庑殿的基本结构包括四个坡面，坡面相交处形成 5 根屋脊，故又称“四阿殿”或“五脊殿”．图 2 是根据庑殿顶构造的多面体模型，底面 $ABCD$ 是矩形，且四个侧面与底面的夹角均相等，则（　）.

图1

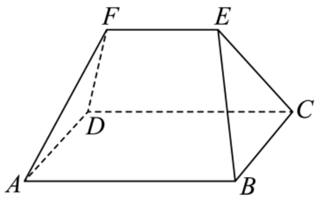


图2

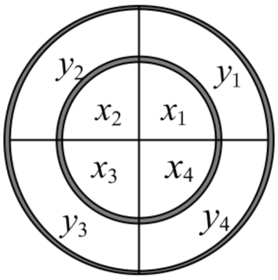
A. $AB = BC + EF$　　B. $AB = \dfrac{BC}{2} + EF$

C. $AB = BC + \dfrac{EF}{2}$　　D. $AB = 2BC - EF$

9. 已知$\{a_n\}$是公差为$\dfrac{2\pi}{3}$的等差数列，集合$S = \{\cos a_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$，若$S = \{x, y\}$，则$xy =$（　）

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. $-\dfrac{1}{2}$

10. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起（有一轴穿过它们的圆心），两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域，小圆盘上所写的实数分别记为x_1, x_2, x_3, x_4，大圆盘上所写的实数分别记为y_1, y_2, y_3, y_4，如图所示. 将小圆盘逆时针旋转$i(i = 1,2,3,4)$次，每次转动90°，记$T_i(i = 1,2,3,4)$为转动i次后各区域内两数乘积之和，例如$T_1 = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1$． 若$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 0$，$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 0$，则以下结论正确的是



A. T_1, T_2, T_3, T_4中至少有一个为正数　　B. T_1, T_2, T_3, T_4中至少有一个为负数

C. T_1, T_2, T_3, T_4中至多有一个为正数　　D. T_1, T_2, T_3, T_4中至多有一个为负数

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知数列$\{a_n\}$满足，$a_4 = 1$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$　（$n = 1, 2, \cdots$），则$\{a_n\}$的前 4 项和为_______.

12. 已知$3^a = 4$，$b = \log_3 \dfrac{9}{4}$，则$a + b$的值为_________.

13. 已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\sin C(a^2+b^2-c^2)$，则$\angle C=$________.

14. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$与直线$y=2x$无公共点，则正数$a$的一个取值可以为________.

15. 已知四边形$ABCD$是椭圆$M:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的内接四边形，其对角线AC和BD交于原点O，且斜率之积为$-\frac{1}{3}$．给出下列四个结论：

①四边形$ABCD$是平行四边形；

②存在四边形$ABCD$是菱形；

③存在四边形$ABCD$使得$\angle AOD=91°$；

④存在四边形$ABCD$使得$|AC|^2+|BD|^2=\frac{64}{5}$.

其中所有正确结论的序号为________.

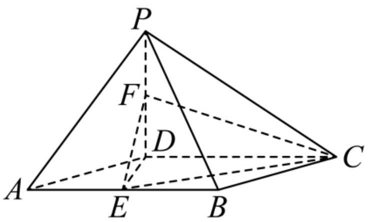
三、解答题共 4 小题．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知函数$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

（I）求$f(x)$的定义域；

（II）设$\beta\in(0,\pi)$，且$f(\beta)=2\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，求$\beta$的值.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为菱形，E,F分别为AB,PD的中点.



（1）求证：$EF\ //$平面PBC；

（2）若$AD=2\sqrt{3},PD=4$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知．求二面角$E-FC-D$的大小.

条件①：$PB=PC$；

条件②：$DE\perp PC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18. 2023年10月17日至18日，第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行，成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动．此次活动主题为“高质量共建‘一带一路’，携手实现共同发展繁荣”，而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙．下表是从 2018 年到 2022 年，每年中欧班列运行的

列数（单位：万列）.

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

（1）计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数；

（2）从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 3 年，运行列数大于 1.24（单位：万列）有 X 年，求 X 的分布列和数学期望；

（3）设 2018 年，2019 年，2020 年运行列数的方差为 s_1^2，2020 年，2021 年，2022 年运行列数的方差为 s_2^2，从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2，试判断 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小关系.（结论不要求证明）

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1-x\right)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0, f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-cx,\ x\in(-\infty, 0)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（3）若 $a<x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)<b$ 对 $x\in(-\infty, 0)$ 恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】B

【分析】先用列举法表示集合 A，再求补集即可．

【详解】因为 $x^2 \le 2$，

所以 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$，

因为 $x \in \mathrm{Z}$，

所以 $A = \{-1,0,1\}$，

所以 $\complement_U A = \{-2,2,3\}$．

故选：B．

2.【答案】B

【分析】利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令 x 的指数为 0 求出 r，将 r 的值代入通项求出展开式的常数项．

【详解】二项式 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=(-2)^r \mathrm{C}_4^r x^{4-2r}$，令 $4-2r=0$，解得 $r=2$，所以展开式的常数项为 $T_3 = 4\mathrm{C}_4^2 = 24$

故选：B

3.【答案】B

【分析】由 P 的坐标得到 z，由复数的除法运算得到 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$，从而得到 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$ 的虚部．

【详解】由图可得 $P(-1,2)$，所以 $z=-1+2\mathrm{i}$，

所以 $\dfrac{z}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \dfrac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}$，虚部为 1．

故选：B．

4.【答案】C

【分析】用特殊值代入判断即可．

【详解】对于 A，取 $a=2, b=1$ 满足题意，但 $2^3 > 1^3$，故 A 错误；

对于 B，取 $a=-1, b=-2$ 满足题意，但 $\frac{b}{a} = 2 > 1$，故 B 错误；

对于 C，因为 $a > b$，所以 $a-b>0$，

因为指数函数 $y=0.2^x$ 在 R 上单调递减，

所以 $0.2^{a-b}<0.2^0=1$,故 C 正确；

对于 D，取 $a=-1,b=-2$ 满足题意，但 $|-1|<|-2|$，故 D 错误.

故选：C.

5.【答案】D

【分析】直接根据抛物线焦半径公式计算得到答案.

【详解】抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，

因为点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，P 的横坐标为 4，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，

所以 $|PF|$ 等于点 P 到直线 $x=-1$ 的距离，

所以 $|PF|=4+1=5$，

故选：D.

6.【答案】A

【分析】根据 $|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$ 得到 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=1$，从而 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，充分性成立；根据 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ 时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=|1+\lambda|\geq 1$，但不一定得到 $|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$，必要性不成立，从而得到正确答案.

【详解】充分性：$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=5+2\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 9$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 2$，

又因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=2\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$，所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\geq 1$，

又因为 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\leq 1$，所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=1$，$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$，

所以 $\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，充分性成立；

必要性：若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\lambda\vec{a}\right|=\left|(1+\lambda)\vec{a}\right|=|1+\lambda|\left|\vec{a}\right|=|1+\lambda|\geq 1$，

但不一定满足 $|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$，必要性不成立.

所以，$|\vec{a}+\vec{b}|\geq 3$”是“存在实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$”成立的充分而不必要条件.

故选：A.

7.【答案】C

【分析】由条件可得点 P 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的一点，因此点 P 到直线的距离的最大值为 $d+r$,只需用点到直线的距离求出 d 的最大值即可.

【详解】设点 $P(x,y)$，

因为 $|PO|=\sqrt{x^2+y^2}=1$，

所以 $x^2+y^2=1$，

所以点 P 是在以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 1 的圆上，

因为点 $(0,0)$ 到直线 $x-my-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+m^2}}=\leq 2$，

当且仅当 $m=0$ 时等号成立，

所以点 P 到直线 $x-my-2=0$ 的距离的最大值为 $2+1=3$.

故选：C.

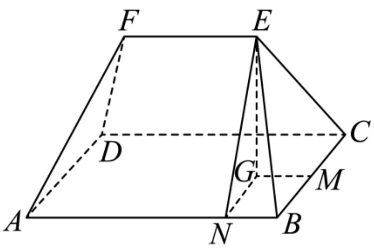
8.【答案】A

【分析】设点 E 在底面 $ABCD$ 上的射影为 G，作 $GM\perp BC$，$GN\perp AB$，垂足分别为 M，N，设四个侧面与底面的夹角为 θ，即可得到 $\angle EMG=\angle ENG=\theta$，根据三角形全等得到方程，整理即可.

【详解】如图所示，设点 E 在底面 $ABCD$ 上的射影为 G，作 $GM\perp BC$，$GN\perp AB$，垂足分别为 M，N.

则 $\angle EMG$ 为侧面 EBC 与底面 $ABCD$ 的夹角，$\angle ENG$ 为侧面 $EBAF$ 与底面 $ABCD$ 的夹角，

设四个侧面与底面的夹角为 θ，则在 $\mathrm{Rt}\triangle EMG$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ENG$ 中，$\angle EMG=\angle ENG=\theta$，



又 GE 为公共边，所以 $GN=GM$，即 $\dfrac{AB-EF}{2}=\dfrac{BC}{2}$，整理得 $AB=BC+EF$.

故选：A

9.【答案】D

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的等差数列,

所以 $a_n=a_1+(n-1)\times\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}n+a_1-\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $\cos a_n=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n+a_1-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,

所以数列 $\{\cos a_n\}$ 是周期为 3 的数列.

不妨取 $a_1=-\dfrac{\pi}{3}$, 则 $a_2=\dfrac{\pi}{3}, a_3=\pi$,

所以 $\cos a_1=\cos a_2=\dfrac{1}{2}, \cos a_3=-1$,

所以 $S=\{x,y\}=\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}$,

所以 $ab=-\frac{1}{2}$.

故选：D.

10.【答案】A

【详解】根据题意可知：

（$x_1+x_2+x_3+x_{4?}$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）>0,

又（$x_1+x_2+x_3+x_{4?}$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）

去掉括号即得：

$x_1y_2+x_2y_2+x_1y_3+x_1y_4+x_2y_2+x_2y_2+x_2y_3+x_2y_4+x_3y_2+x_3y_2+x_3y_3+x_3y_4$

$+x_4y_2+x_4y_2+x_4y_3+x_4y_4=T_1+T_2+T_3+T_4>0$,

所以可知 T_1,T_2,T_3,T_4 中至少有一个为正数，故选 A

点睛：借此题关键是要根据题意明白 T_1,T_2,T_3,T_4 所表达的意思，然后容易发现

（$x_1+x_2+x_3+x_{4?}$）（$y_1+y_2+y_3+y_4$）$=T_1+T_2+T_3+T_4>0$ 从而得出结论

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】15

【分析】由题可知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，根据题意求出首项和公比即可知道前 n 项和.

【详解】因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(n=1,2,\ldots)$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

因为 $a_4=a_1\left(\frac{1}{2}\right)^3=1$,

所以 $a_1=8$,

所以 $a_1=8,a_2=4,a_3=2,a_4=1$,

$S_4=8+4+2+1=15$.

故答案为：15.

12.【答案】2

【分析】根据指数式和对数式的互化及对数的运算性质计算即可.

【详解】因为 $3^a=4$,

所以 $a=\log_3 4$,

所以 $a+b=\log_3 4+\log_3\frac{9}{4}=\log_3 9=2$.

故答案为：2.

13.【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【分析】根据余弦定理及三角形面积公式求解即可.

【详解】因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\sin C\left(a^2+b^2-c^2\right)$,

又因为 $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$,

所以 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\sin C\times 2ab\cos C$,

因为$ab>0, C\in(0,\pi)$,

所以 $\sin C>0$,

所以 $\cos C=\dfrac{1}{2}$,

因为 $C\in\left(0,\pi\right)$,

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

故答案为： $\dfrac{\pi}{3}$.

14.【答案】$\frac{1}{2}$（答案不唯一）

【分析】根据题意可知，只需直线的斜率大于等于渐近线的斜率即可.

【详解】双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的一条渐近线的斜率为 $\dfrac{1}{a}$,

若双曲线与直线无公共点,

只需 $\dfrac{1}{a}\le 2$,

解得 $a\ge\dfrac{1}{2}$.

故 a 的一个取值可以为$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$（答案不唯一）.

15.【答案】①③④

【分析】利用椭圆的对称性判断①；利用菱形的对角线互相垂直可判断②；利用正切函数的和差公式与性质判断③；利用斜率关系得到 $|OA|^2+|OB|^2$ 的表达式，然后利用基本不等式求 $|AC|^2+|BD|^2$ 的最大值，可判断④.

【详解】因为四边形 $ABCD$ 是椭圆 $M:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的内接四边形， AC 和 BD 交于原点 O ,

由椭圆的对称性可知$|OA|=|OC|$且$|OB|=|OD|$，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故①正确；

假设对角线 AC 和 BD 的斜率分别为k_1,k_2，

若四边形 $ABCD$ 是菱形，则其对角线互相垂直，即 $k_1\cdot k_2=-1$，

而这与$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{3}$矛盾，所以不存在四边形 $ABCD$ 是菱形，故②错误；

不妨设直线 AC 的倾斜角为α，直线 BD 的倾斜角为β，且$\alpha>\beta$，

则$\tan\alpha=k_1,\tan\beta=k_2>0$，又$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{3}$，则$k_1=-\dfrac{1}{3k_2}$，

则$\tan\angle AOD=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3k_2}-k_2\right)$

$\le-\dfrac{3}{2}\times2\sqrt{\dfrac{1}{3k_2}\cdot k_2}=-\sqrt{3}=\tan120^\circ$，

又$0^\circ<\angle AOD<180^\circ$，则$90^\circ<\angle AOD<120^\circ$，

所以存在四边形 $ABCD$ 使得$\angle AOD=91^\circ$，故③正确；

直线 AC 的方程 $y=k_1x$，直线 BD 的方程 $y=k_2x$，

由$\begin{cases}y=k_1x\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$x^2+2(k_1x)^2=2$，即$x^2=\dfrac{2}{2k_1^2+1}$，可得$x_A^2=x_C^2=\dfrac{2}{2k_1^2+1}$，

同理可得$x_B^2=x_D^2=\dfrac{2}{2k_2^2+1}$，

则$|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{2(k_1^2+1)}{2k_1^2+1}+\dfrac{2(k_2^2+1)}{2k_2^2+1}=2+\dfrac{1}{2k_1^2+1}+\dfrac{1}{2k_2^2+1}$，

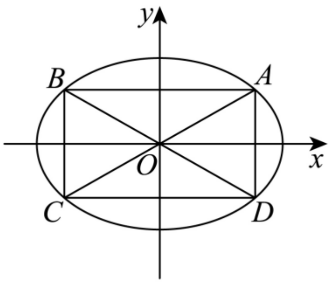
由$k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{3}$，得$k_2^2=\dfrac{1}{9k_1^2}$，令$k_1^2=t,k_2^2=\dfrac{1}{9t}(t>0)$，

则$|OA|^2+|OB|^2=2+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{1}{\dfrac{2}{9t}+1}=2+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{9t}{9t+2}$

$=3+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{-2}{9t+2}=3+\dfrac{9t+2-2(2t+1)}{(2t+1)(9t+2)}$

$=3+\dfrac{5t}{18t^2+13t+2}=3+\dfrac{5}{18t+\dfrac{2}{t}+13}\le3+\dfrac{5}{2\sqrt{18t\cdot\dfrac{2}{t}}+13}=3+\dfrac{1}{5}=\dfrac{16}{5}$，

当且仅当$18t=\frac{2}{t}$，即$t=\frac{1}{3},k_1^2=k_2^2=\frac{1}{3}$时，等号成立；



于是$\left|AC\right|^2+\left|BD\right|^2=\left(2\left|OA\right|\right)^2+\left(2\left|OB\right|\right)^2=4\left(\left|OA\right|^2+\left|OB\right|^2\right)\le\frac{64}{5}$，

当且仅当$k_1^2=k_2^2=\frac{1}{3}$，即四边形$ABCD$矩形时，等号成立，

所以存在四边形$ABCD$使得$|AC|^2+|BD|^2=\frac{64}{5}$，故④正确.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点睛：本题结论④的解决关键是利用弦长公式得到$|AC|^2+|BD|^2$关于t的表达式，从而利用基本不等式即可得解.

三、解答题共 4 小题．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】（I）$\{x\,|\,x\ne k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$（II）$\beta=\frac{\pi}{12}$，或$\beta=\frac{3\pi}{4}$

【详解】试题分析：（Ⅰ）使正切函数有意义，需满足$x+\frac{\pi}{4}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解不等式得定义域；（Ⅱ）将$\beta$代入得$\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，将切化弦结合诱导公式得$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$，等价于$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，或$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，结合$\beta$的范围可得结果.

试题解析：（Ⅰ）由$x+\frac{\pi}{4}\ne k\pi+\frac{\pi}{2}$，得$x\ne k\pi+\frac{\pi}{4}$，　$k\in Z$.

所以 函数$f\left(x\right)$的定义域是$\{x\,|\,x\ne k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$.

（Ⅱ）依题意，得$\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\frac{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$，

整理得$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=0$，所以$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，或$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以$\beta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，由$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，得$\beta+\frac{\pi}{4}=\pi$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$；由$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，得$\beta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{12}$，所以$\beta=\frac{\pi}{12}$，或$\beta=\frac{3\pi}{4}$.

17.【答案】（1）证明见解析

（2）答案见解析

【分析】（1）取PC中点M，证得$BE//MF,BE=MF$，得到四边形$BEMF$为平行四边形，证得$EF//BM$，结合线面平行的判定定理，即可证得$EF//$平面PBC.

（2）选择条件①：根据题意，证得$DE\perp DC$，以D为原点，建立空间直角坐标系，分别求得平面FCD和平面EFC的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$和$\overrightarrow{n_2}=\left(2,\sqrt{3},3\right)$，结合向量的夹角公式，即可求解；选择条件②：以$D$为原点，连接$BD$，求得$DE=3$，分别求得平面$FCD$和平面$EFC$的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$和$\overrightarrow{n_2}=\left(2,\sqrt{3},3\right)$，结合向量的夹角公式，即可求解.

【小问 1 详解】

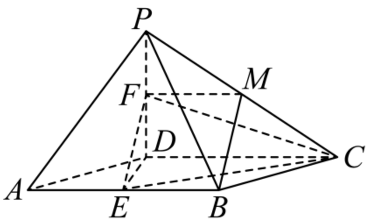
证明：取PC中点M，连接FM,BM，

在$\triangle PCD$中，M,F分别为PC,PD的中点，所以$MF//DC$且$MF=\frac{1}{2}DC$，

在菱形$ABCD$中，因为$AB//DC$且// $BE=\frac{1}{2}DC$，

所以$BE//MF,BE=MF$,所以四边形$BEMF$为平行四边形，所以$EF//BM$，

又因为$EF\not\subset$平面PBC，且$BM\subset$平面PBC，所以$EF//$平面PBC.



【小问 2 详解】

解：选择条件①：

因为$PD\perp$平面$ABCD$，$DB,DC,DE\subset$平面$ABCD$，

所以$PD\perp DB,PD\perp DC,PD\perp DE$.

连接BD，因为$PB^2=PD^2+BD^2,PC^2=PD^2+DC^2$，且$PB=PC$，

所以$BD=DC$，在菱形$ABCD$中，$AB=BD=AD$，即$\triangle ADB$为正三角形，

又因为E为AB中点，所以$DE\perp DC$，

以D为原点，DE,DC,DP所在的直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系$D-xyz$，

如图所示，因为$AB//DC$且$DE\perp AB$.

又因为$\triangle ADB$为正三角形且$AD=2\sqrt{3}$，所以$DE=3$，

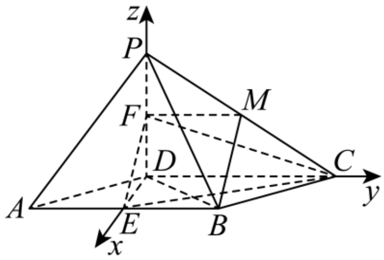
则 $F\left(0,0,2\right),E\left(3,0,0\right),C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(-3,0,2\right),\overrightarrow{EC}=\left(-3,2\sqrt{3},0\right)$，

由 $DE\perp$ 平面 FCD，可得平面 FCD 的法向量为 $\vec{n}_1=\left(1,0,0\right)$，

设平面 EFC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=-3x+2z=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=-3x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $x=2$，可得 $y=\sqrt{3},z=3$，所以 $\overrightarrow{n_2}=\left(2,\sqrt{3},3\right)$，

所以 $\cos\vec{n}_1,\vec{n}_2=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{2}$，所以二面角 $E-FC-D$ 的大小为 60°.



选择条件②：

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $DE,\ DC\ \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp DE,PD\perp DC$.

又因为 $DE\perp PC,PD\cap PC=P$，且 $PD,PC\subset$ 平面 PCD，所以 $DE\perp$ 平面 PCD，

因为 $DC\subset$ 平面 PCD，所以 $DE\perp DC$，

以 D 为原点，DE,DC,DP 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

连接 BD，因为 $AB//DC$ 且 $DE\perp AB$，又因为又 E 为 AB 中点，所以 $AD=DB$，

所以 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DE=3$，

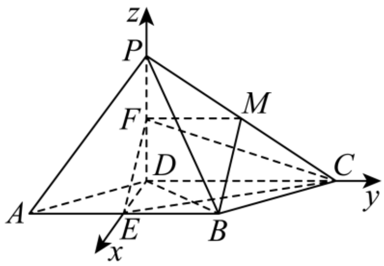
则 $F\left(0,0,2\right),E\left(3,0,0\right),C\left(0,2\sqrt{3},0\right)$，则 $\overrightarrow{EF}=\left(-3,0,2\right),\overrightarrow{EC}=\left(-3,2\sqrt{3},0\right)$，

由 $DE\perp$ 平面 FCD，可得平面 FCD 的法向量为 $\vec{n}_1=\left(1,0,0\right)$，

设平面 EFC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=-3x+2z=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=-3x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $x=2$，可得 $y=\sqrt{3},z=3$，所以 $\overrightarrow{n_2}=\left(2,\sqrt{3},3\right)$，

所以 $\cos\vec{n}_1,\vec{n}_2=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{16}}=\dfrac{1}{2}$，所以二面角 $E-FC-D$ 的大小为 60°.



18.【答案】（1）1.158 万列

（2）分布列见解析；期望为 $\frac{6}{5}$

（3）$s_2^2 < s_1^2 < s_3^2$

【分析】（1）由平均值的计算公式计算可得；

（2）由超几何分布的概率计算得到分布列，由数学期望的计算公式得到数学期望；

（3）观察五个数据的离散程度，对方差的大小进行判断.

【小问 1 详解】

从 2018 年到 2022 年运行列数的平均值为

$\frac{0.63+0.82+1.24+1.5+1.6}{5}=1.158$.

所以中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数为 1.158 万列.

【小问 2 详解】

X 可能的取值为 $0,1,2$.

$P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$， $P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$， $P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

随机变量 X 的期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

【小问 3 详解】

$s_2^2 < s_1^2 < s_3^2$.

证明：设 2018 年，2019 年，2020 年运行列数的平均数为 x_1，

2020 年，2021 年，2022 年运行列数的平均数为 x_2，

从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的平均数为 x_3，

则 $x_1=\frac{0.63+0.82+1.24}{3}=\frac{269}{300}$， $x_2=\frac{1.24+1.5+1.6}{3}=\frac{217}{150}$，

$x_3=\frac{0.63+0.82+1.24+1.5+1.6}{5}=1.158$，

$$s_1^2=\frac{\left(0.63-\frac{269}{300}\right)^2+\left(0.82-\frac{269}{300}\right)^2+\left(1.24-\frac{269}{300}\right)^2}{3}=\frac{\left(\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{11}{150}\right)^2+\left(\frac{103}{300}\right)^2}{3}=\frac{5831}{90000}\approx 0.065,$$

$$s_2^2=\frac{\left(1.24-\frac{217}{150}\right)^2+\left(1.5-\frac{217}{150}\right)^2+\left(1.6-\frac{217}{150}\right)^2}{3}=\frac{\left(\frac{31}{150}\right)^2+\left(\frac{4}{75}\right)^2+\left(\frac{23}{150}\right)^2}{3}=\frac{259}{11250}\approx 0.023,$$

$$s_3^2=\frac{(0.63-1.158)^2+(0.82-1.158)^2+(1.24-1.158)^2+(1.5-1.158)^2+(1.6-1.158)^2}{5}=\frac{0.71208}{5}=0.142416$$

,

所以 $s_2^2<s_1^2<s_3^2$.

19.【答案】（1） $y=-x$

（2）答案见解析　（3） b 的最小值为 0， a 的最大值为 -1

【分析】（1）根据导数的几何意义求解即可；

（2）利用导函数研究函数的单调性，要注意对参数进行讨论；

（3）先对式子进行变形为 $\frac{b}{x}<\ln(1-\frac{1}{x})<\frac{a}{x}$，再令 $u=\frac{1}{x}\in(-\infty,0)$，因此 $bu<\ln(1-u)<au$，再构造函数并结合（2）的结论讨论即可.

【小问 1 详解】

$f'(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$,

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}\cdot(1-x)'=\frac{1}{x-1},$$

所以 $k=f'(0)=-1$,

又 $f(0)=0$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-x$.

【小问 2 详解】

由 $g(x)=f(x)-cx,\ x\in(-\infty,0)$，得： $g'(x)=\frac{1}{x-1}-c=\frac{1}{1-x}[cx-(c+1)]$.

注意到 $0<\frac{1}{1-x}<1$,

①当 $c\geq 0$ 时， $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减；

②当 $c\leq -1$ 时， $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增；

③当 $-1<c<0$ 时，令 $g'(x)=0$ 得： $x=\frac{1}{c}+1$.

x	$\left(-\infty,\frac{1}{c}+1\right)$	$\frac{1}{c}+1$	$\left(\frac{1}{c}+1,0\right)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

综上，当 $c\le -1$ 时，$g(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,0)$，无单调减区间；

当 $c\ge 0$ 时，$g(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,0)$，无单调增区间；

当 $-1<c<0$ 时，$g(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,\frac{1}{c}+1)$，单调减区间是 $(\frac{1}{c}+1,0)$．

【小问 3 详解】

$a<x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<b$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立等价于 $\frac{b}{x}<\ln(1-\frac{1}{x})<\frac{a}{x}$．

设 $u=\frac{1}{x}\in(-\infty,0)$，则 $\frac{b}{x}<\ln(1-\frac{1}{x})<\frac{a}{x}$ 等价于 $bu<\ln(1-u)<au$，

即 $\ln(1-u)-au<0$，且 $\ln(1-u)-bu>0.$

由（2）知：

当 $c\ge 0$ 时，$g(u)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递减，故 $g(u)>g(0)=0$，

即对任意 $b\ge 0$，$\ln(1-u)>bu$；

当 $c\le -1$ 时，$g(u)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调增，故 $g(u)<g(0)=0$，

即对任意 $a\le -1$，$\ln(1-u)<au$．

当 $-1<c<0$ 时，$g(u)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{c}+1\right)$ 单调递增，在区间 $\left(\frac{1}{c}+1,0\right)$ 单调递减.

所以 $g(u)$ 的极大值 $=g\left(\frac{1}{c}+1\right)>g(0)=0$．

因为 $\frac{1}{c^2}>1$，又可证得 $g(-\frac{1}{c^2})=\ln(1+\frac{1}{c^2})+\frac{1}{c}$，

设 $\frac{1}{c}=m,m<-1$，

设 $h(m)=\ln(1+m^2)+m$，

则 $h'(m)=\frac{2m}{1+m^2}+1=\frac{(m+1)^2}{m^2+1}>0$，

故此 $h(m)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递增，

$h(m)<h(-1)=\ln 2-1<0$，

故此 $g(-\frac{1}{c^2})<0$，

当 $-1<c<0$ 时成立，所以存在 $u_0\in(-\frac{1}{c^2},\frac{1}{c}+1)$，使得 $g(u_0)=0$，

且当 $u\in(u_0,0)$ 时，$g(u)>0$；当 $u\in(-\infty,u_0)$ 时，$g(u)<0$，不合题意.

综上，b 的最小值为 0，a 的最大值为 -1．

【点睛】思路点睛：不等式 $a<x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)<b$ 对 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立等价于 $\frac{b}{x}<\ln(1-\frac{1}{x})<\frac{a}{x}$，再用换元的

方法转化为 $bu < \ln(1-u) < au$ ，这样函数的形式简单，讨论起来更加简便.