北京二中 2024—2025 学年度高三年级第一学期开学测试

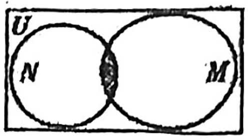
数学

命题人：<u>周长春</u>　审核人：<u>刘　冬</u>　得分：________

姓名________　学号________　班级________　密　封　线

一．选择题（共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.已知全集 $U=R$，集合 $M=\left\{x\middle|x^2-2x-3\le 0\right\}$ 和 $N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$ 的关系的韦恩（Venn）图如图所示，则阴影部分所示的集合的元素共有



A. 3 个　　B. 2 个

C. 1 个　　D. 无穷多个

2.若 m，n 是两条不同的直线，α，β，γ 是三个不同的平面，则下列命题正确的是

A．若 $m\subset\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\alpha$　　B．若 $\alpha\perp\gamma$，$\alpha\perp\beta$，则 $\beta//\gamma$

C．若 $m\perp\beta$，$m//\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$　　D．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

3.设 $a=\log_3 0.4$，$b=\log_4 3$，$c=3^{0.4}$，则

A．$a<c<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

4.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R.当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$；当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(-x)=-f(x)$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+\dfrac{1}{2})=f(x-\dfrac{1}{2})$.则 $f(6)=$

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

5．定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和，若 $f(x)=\lg(10^x+1)$，那么

A．$g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

B．$g(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C．$g(x)=\dfrac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\dfrac{x}{2}$

D．$g(x)=-\dfrac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\dfrac{x}{2}$

6．设 x 为实数，则“$x<0$”是“$x+\dfrac{1}{x}\le -2$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7．用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中比 40000 大的偶数共有

A.144 个　　B.120 个　　C.96 个　　D.72 个

8．按照“碳达峰”、“碳中和”的实现路径，2030 年为碳达峰时期，2060 年实现碳中和，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池迎来了蓬勃发展的风口. Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量 C（单位：Ah），放电时间 t（单位：h）与放电电流 I（单位：A）之间关系的经验公式：$C=I^n\cdot t$，其中 n 为 Peukert 常数. 为了测算某蓄电池的

Peukert 常数 n，在电池容量不变的条件下，当放电电流 $I=20\text{A}$ 时，放电时间 $t=20\text{h}$；当放电电流 $I=30\text{A}$ 时，放电时间 $t=10\text{h}$. 则该蓄电池的 Peukert 常数 n 大约为

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30, \lg 3\approx 0.48$）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 2

9. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足：函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)+xf'(x)<0$ 成立（$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），若 $a=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$，$b=(\ln 2)f(\ln 2)$，$c=2f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, x<0,\\ \log_a(x+1)+1, x\geq 0\end{cases}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，且函数 $g(x)=|f(x)|+x-2$ 恰好有两个零点，则 a 的取值范围是

A. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\cup\{\frac{3}{4}\}$　　B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\cup\{\frac{3}{4}\}$　　C. $(0, \frac{2}{3}]$　　D. $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 已知甲盒中有 3 个白球，2 个黑球；乙盒中有 1 个白球，2 个黑球.

若从这 8 个球中随机选取一球，该球是白球的概率是________；

若从甲、乙两盒中任取一盒，然后从所取到的盒中任取一球，则取到的球是白球的概率是________.

12. 若 $(x-2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0=$________；$\frac{a_1+a_3}{a_0+a_2+a_4}=$________.

13. 已知直线 $x-y+m=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ 相交，能说明“直线 $x-y+m=0$ 截圆 $C: x^2+y^2+4x-2y=0$ 所得弦长不小于 $2\sqrt{3}$”是假命题的一个 m 的值为________.

14. 设 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点.若在双曲线右支上存在点 P，满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$，且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长，则该双曲线的渐近线方程为________

15. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^3-x}$，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 是奇函数；

② $\forall k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq 0$，关于 x 的方程 $f(x)-kx=0$ 恰有两个不相等的实数根；

③已知 P 是曲线 $y=f(x)$ 上任意一点，$A(-\frac{1}{2},0)$，则 $|AP|\geq\frac{1}{2}$；

④设 $M(x_1,y_1)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一点，$N(x_2,y_2)$ 为曲线 $y=-f(x)$ 上一点.若 $|x_1+x_2|=1$，则 $|MN|\geq 1$.

其中所有正确结论的序号是________.

三．解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.（本小题 13 分）在$\triangle ABC$中，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（1）求证$\triangle ABC$为等腰三角形；

（2） 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一，求b的值.

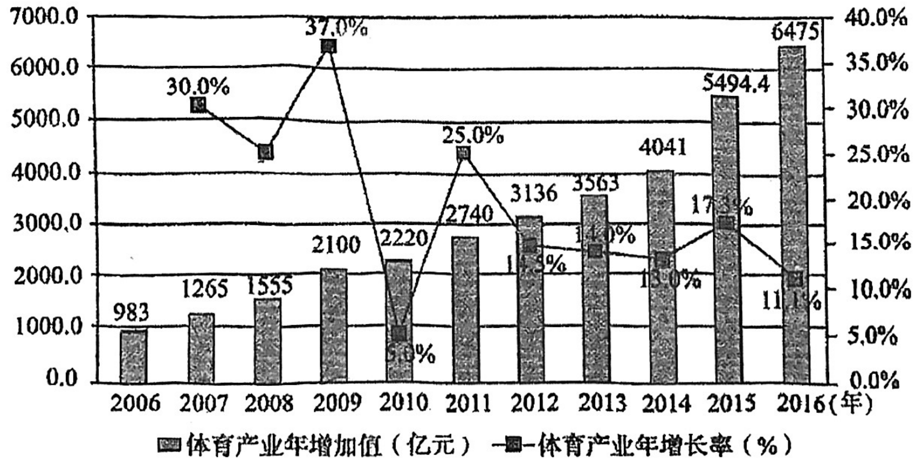
条件①：$\angle B=\dfrac{\pi}{6}$；

条件②：$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{15}{2}$；

条件③：AB边上的高为 3.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 13 分）改革开放 40 年来，体育产业蓬勃发展反映了“健康中国”理念的普及．下图是我国 2006 年至 2016 年体育产业年增加值及年增速图．其中条形图为体育产业年增加值（单位：亿元），折线图为体育产业年增长率（%）.



（1）从 2007 年至 2016 年随机选择 1 年，求该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增加值多 500 亿元以上的概率；

（2）从 2007 年至 2016 年随机选择 3 年，设X是选出的三年中体育产业年增长率超过 20%的年数，求X的分布列与数学期望；

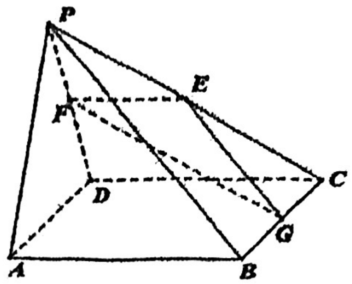
（3）由图判断，从哪年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大？从哪年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大？（结论不要求证明）

18. （本小题 14 分）已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， E、F、G 分别是 PC、PD、BC 的中点．

（1）求证：AB // 平面 EFG；

（2）求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 夹角的大小；

（3）线段 PA 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\frac{\pi}{6}$？若存在，求出线段 PM 的长度；若不存在，说明理由．



19. （本小题 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-4,0)$，$P(2,-3)$．

（1）求椭圆 C 的方程以及离心率；

（2）设直线 $l:y=kx-2$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点，过点 N 作直线 $y=-6$ 的垂线，垂足为 Q．判断直线 MQ 是否过定点，并证明你的结论．

20. （本小题 15 分）已知函数 $f(x)=\frac{\cos x}{x},g(x)=\frac{1}{x}-ax$．

（1）求函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程；；

（2）若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的图象没有公共点，求实数 a 的取值范围．

21. （本小题 15 分）已知集合 $S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正整数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列 $\}(n\geq 2)$，函数 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

对于 $(a_1,a_2,\cdots a_n)\in S_n$，定义：$b_i=g(a_i-a_1)+g(a_i-a_2)+\cdots+g(a_i-a_{i-1}),i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$b_1=0$，称 b_i 为 a_i 的满意指数．排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的生成列；排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的母列．

（1）当 $n=6$ 时，写出排列 $3,5,1,4,6,2$ 的生成列及排列 $0,-1,2,-3,4,3$ 的母列；

（2）证明：若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 为 S_n 中两个不同排列，则它们的生成列也不同；

（3）对于 S_n 中的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 τ：将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项，其它各项顺序不变，得到一个新的排列．证明：一定可以经过有限次变换 τ 将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 变换为各项满意指数均为非负数的排列．

北京二中 2024—2025 学年度高三年级第一学期开学测试

数学　　　　2024.8

命题人：周长春　　审核人：刘冬　　得分：__________

第一部分（选择题　共 40 分）

一．选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1~5BCCDC　　6~10CBBAA

二．填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．$\frac{1}{2}$，$\frac{7}{15}$　　　12．16　$-\frac{40}{41}$　　　13．0.（答案不唯一）

14. $y=\pm\frac{4}{3}x$　　　15.②③④

三．解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16．（本小题 13 分）在△ABC 中，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（1）求证△ABC 为等腰三角形；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使△ABC 存在且唯一，求 b 的值.

条件①：$\angle B=\frac{\pi}{6}$；

条件②：△ABC 的面积为 $\frac{15}{2}$；

条件③：AB 边上的高为 3.

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（1）在△ABC 中，$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

设 $a=5m$，$b=\sqrt{10}m$，其中 $m>0$.

根据余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得

$$25m^2=10m^2+c^2-2c\times\sqrt{10}m\times\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

整理，得 $c^2-2mc-15m^2=0$，

因为 $c>0$，解得 $c=5m$，所以 $a=c$.

所以△ABC 为等腰三角形.　………………7 分

（2）若选择条件②：在$\triangle ABC$中，由$\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，得$\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}m\times 5m\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{15}{2}m^2=\dfrac{15}{2}$．

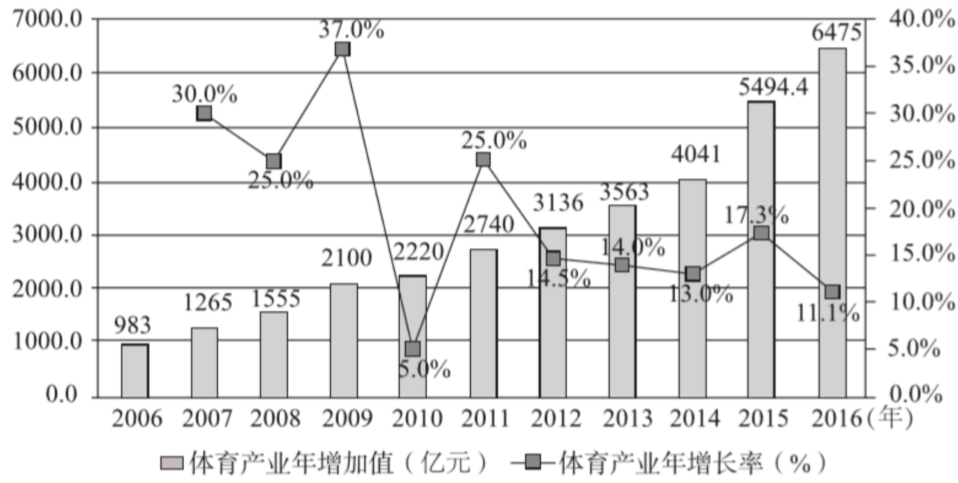
解得$m=1$，即$b=\sqrt{10}$．　………………13 分

若选择条件③：在$\triangle ABC$中，由AB边上的高为 3，得$b\sin A=3$．

由$\cos A=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，得$\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．

解得$b=\sqrt{10}$．　………………13 分

17.（本小题 13 分）改革开放 40 年来，体育产业蓬勃发展反映了“健康中国”理念的普及．下图是我国 2006 年至 2016 年体育产业年增加值及年增速图．其中条形图为体育产业年增加值（单位：亿元），折线图为体育产业年增长率（%）．



（1）从 2007 年至 2016 年随机选择 1 年，求该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增加值多500亿元以上的概率；

（2）从 2007 年至 2016 年随机选择 3 年，设X是选出的三年中体育产业年增长率超过 20%的年数，求X的分布列与数学期望；

（3）由图判断，从哪年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大？从哪年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大？（结论不要求证明）

解：（1）设A表示事件“从 2007 年至 2016 年随机选出 1 年，该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增加值多500亿元以上”．由题意可知，2009 年，2011 年，2015 年，2016 年满足要求，

故$P(A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$．　………………4 分

（2）由题意可知，X 的所有可能取值为0，1，2，3，且

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}；\qquad P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}；$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}；\qquad P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

故 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.　　　　……………………10 分

（3）从 2008 年或 2009 年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大.

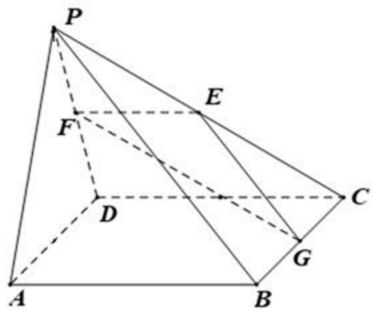
从 2014 年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大.　　　　……………………13 分

18. （本小题 14 分）已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，E、F、G 分别是 PC、PD、BC 的中点.

（1）求证：AB //平面 EFG；

（2）求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 夹角的大小；

（3）线段 PA 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为$\frac{\pi}{6}$，若存在，求出线段 PM 的长度；若不存在，说明理由.



解：（1）证明:因为E、F 分别是 PC、PD 的中点

所以 EF // CD

又因为底面 $ABCD$ 是正方形

所以 AB // CD

所以 AB // EF

又因为 $AB\not\subset$ 平面 EFG

$EF\subset$平面 EFG

所以 AB //平面 EFG　　　　…………………4 分

（2）取 AD 中点 O，连结 OP,OG

因为△ PAD 是正三角形，O 是 AD 的中点，

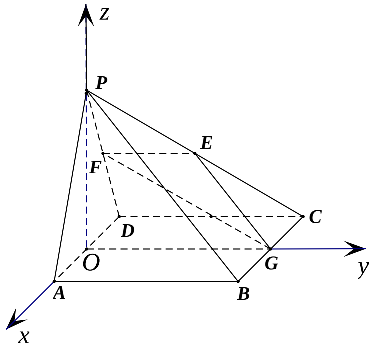
所以 $PO\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$



所以 $PO\perp OG, PO\perp OA,$

在正方形 $ABCD$ 中，G、O 分别是 BC、AD 的中点，所以 $OA\perp OG$

所以 OA，OG，OP 两两垂直

如图，以 O 点为原点分别以 OA、OG、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

则 $O(0,0,0), A(2,0,0), B(2,4,0), C(-2,4,0), D(-2,0,0), G(0,4,0), P(0,0,2\sqrt{3})$，

$E(-1,2,\sqrt{3}), F(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,0), \overrightarrow{EG}=(1,2,-\sqrt{3})$，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

$$\begin{cases}-2y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,1)$，

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

所以平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$.　　　………………10 分

（3）假设线段 PA 上存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$，

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}, \lambda\in[0,1]$，

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{GP}+\lambda\overrightarrow{PA}$，

所以 $\overrightarrow{GM}=(2\lambda,-4,2\sqrt{3}(1-\lambda))$.

所以 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\left|\cos<\overrightarrow{GM},\vec{m}>\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+7}}$，

整理得 $2\lambda^2-3\lambda+2=0$，无实解，导致矛盾

所以，不存在这样的点 M.　　　………………14 分

19. （本小题 15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-4,0)$， $P(2,-3)$.

（1）求椭圆 C 的方程以及离心率；

（2）设直线 $l: y=kx-2$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点，过点 N 作直线 $y=-6$ 的垂线，垂足为 Q .判断直线 MQ 是否过定点，并证明你的结论.

解：（Ⅰ）由题意， $a=4$，

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1,$$

$$a^2=b^2+c^2 \qquad \text{解得 } b=2\sqrt{3}, c=2$$

所以椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ ………………5 分

（Ⅱ）直线 MQ 过定点 $T(0,-4)$

证明如下：

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，则 $Q(x_2,-6)$

由 $\begin{cases} y=kx-2, \\ 3x^2+4y^2=48 \end{cases}$，

$\therefore (3+4k^2)x^2-16kx-32=0$

$\Delta=(-16k)^2+4\times 32(3+4k^2)>0$

$x_1+x_2=\frac{16k}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\frac{-32}{3+4k^2}$.

（方法 1）

$\overrightarrow{TM}=(x_1,y_1+4), \overrightarrow{TQ}=(x_2,-2)$，

$$\begin{aligned} x_1(-2)-x_2(y_1+4) &= -2x_1-x_2(kx_1-2+4) \\ &= -2(x_1+x_2)-kx_1x_2 \\ &= -2\times\frac{16k}{3+4k^2}-k\frac{-32}{3+4k^2}=0 \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{TM}//\overrightarrow{TQ}$，

所以 M， Q， T 三点共线，即直线 MQ 过定点 $T(0,-4)$ ………………15 分

（方法 2）

$$k_{MQ}=\frac{y_1+6}{x_1-x_2}$$

MQ： $y+6=\frac{y_1+6}{x_1-x_2}(x-x_2)$.

令 $x=0$， 得 $y=\frac{6x_1+x_2y_1}{x_2-x_1}$

$$=\frac{6x_1+x_2(kx_1-2)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{6x_1-2x_2+kx_1x_2}{x_2-x_1}$$

$$\frac{6x_1-2x_2+kx_1x_2}{x_2-x_1}-(-4)=\frac{2(x_1+x_2)+kx_1x_2}{x_2-x_1}$$ （略）

或者令 $x=0$，得 $y=\frac{6x_1+x_2y_1}{x_2-x_1}=\frac{6x_1-2x_2+kx_1x_2}{x_2-x_1}=\frac{[6(x_1+x_2)+kx_1x_2]-8x_2}{[-(x_1+x_2)]+2x_2}$ （略）

20.（本小题 15 分）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\cos x}{x},g\left(x\right)=\frac{1}{x}-ax$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程；；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 和函数 $g\left(x\right)$ 的图象没有公共点，求实数 a 的取值范围.

解：（1）因为 $f(x)=\frac{\cos x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，

因为 $f(\frac{\pi}{2})=0$， $f(x)$ 在点 $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 处的切线斜率为 $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}$，

所以切线方程为 $y=-\frac{2}{\pi}(x-\frac{\pi}{2})$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+1$. ………………5 分

（2）因为函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的图象没有公共点，所以 $f(x)=g(x)$，即 $\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}-ax$ 无实根，

所以当 $x\neq 0$ 时， $h(x)=\cos x+ax^2-1=0$ 无实根，

因为 $h(-x)=h(x)$，即 $h(x)$ 是偶函数，所以 $h(x)=\cos x+ax^2-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上无实根.

$h'(x)=2ax-\sin x$,

记 $m(x)=h'(x)=2ax-\sin x$ 则 $m'\left(x\right)=2a-\cos x$， $x\in(0,+\infty)$.

①当 $a<0$ 时， $ax^2<0$，又 $-1\le\cos x\le 1$，则 $\cos x-1\le 0$，所以 $h(x)=\cos x+ax^2-1<0$，满足 $h(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上无实根.

②当 $a=0$ 时， $h(x)=\cos x-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有实根，不合题意，舍去.

③当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时， $m'\left(x\right)=2a-\cos x\geqslant 0$，所以 $h'(x)=2ax-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

则 $h^{'}(x)>h^{'}(0)=0$，所以 $h(x)=\cos x+ax^2-1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)>h(0)=0$，满足 $h(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上无实根.

④当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，因为 $m'(x)=2a-\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，且 $m'(0)=2a-1<0$， $m'(\frac{\pi}{2})=2a>0$，

则存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使 $m'(x_0)=2a-\cos x_0=0$，列表得

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,\frac{\pi}{2})$
$m'(x)$	-	0	+
$m(x)=h'(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<h'(0)=0$，则 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，则 $h(x)<h(0)=0$，

又因为 $h(2\pi)=4a\pi^2>0$，且 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，

所以 $h(x)=\cos x+ax^2-1=0$ 在 $(0,2\pi)$ 上有实根，不合题意.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},+\infty)$.　　　　………………15 分

21．（本小题 15 分）已知集合 $S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正整数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列$\}(n\geq 2)$，

函数 $g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

对于 $(a_1,a_2,\cdots a_n)\in S_n$，定义：$b_i=g(a_i-a_1)+g(a_i-a_2)+\cdots+g(a_i-a_{i-1}),i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$b_1=0$，称 b_i 为 a_i 的满意指数．排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的生成列；排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为排列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的母列.

（1）当 $n=6$ 时，写出排列 $3,5,1,4,6,2$ 的生成列及排列 $0,-1,2,-3,4,3$ 的母列；

（2）证明：若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 为 S_n 中两个不同排列，则它们的生成列也不同；

（3）对于 S_n 中的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 τ：将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项，其它各项顺序不变，得到一个新的排列．证明：一定可以经过有限次变换 τ 将排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 变换为各项满意指数均为非负数的排列.

（1）解：当 $n=6$ 时，排列 $3,5,1,4,6,2$ 的生成列为 $0,1,-2,1,4,-3$；

　　排列 $0,-1,2,-3,4,3$ 的母列为 $3,2,4,1,6,5$.　　　　………………4 分

（2）证明：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的生成列是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$；$a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 的生成列是 $b_1',b_2',\cdots,b_n'$.

　　从右往左数，设排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 第一个不同的项为 a_k 与 a_k'，即：$a_n=a_n'$，$a_{n-1}=a_{n-1}'$，$\cdots$，$a_{k+1}=a_{k+1}'$，$a_k\neq a_k'$.

　　显然 $b_n=b_n'$，$b_{n-1}=b_{n-1}'$，$\cdots$，$b_{k+1}=b_{k+1}'$，下面证明：$b_k\neq b_k'$.

　　由满意指数的定义知，a_i 的满意指数为排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中前 $i-1$ 项中比 a_i 小的项的个数减去比 a_i 大

的项的个数．

由于排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的前 k 项各不相同，设这 k 项中有 l 项比 a_k 小，则有 $k-l-1$ 项比 a_k 大，从而 $b_k=l-(k-l-1)=2l-k+1$．

同理，设排列 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 中有 l' 项比 a_k' 小，则有 $k-l'-1$ 项比 a_k' 大，从而 $b_k'=2l'-k+1$．

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 与 $a_1',a_2',\cdots,a_k'$ 是 k 个不同数的两个不同排列，且 $a_k\neq a_k'$，

所以 $l\neq l'$， 从而 $b_k\neq b_k'$．

所以排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $a_1',a_2',\cdots,a_n'$ 的生成列也不同．………………10 分

（3）证明：设排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的生成列为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，且 a_k 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中从左至右第一个满意指数为负数的项，所以 $b_1\geq 0,b_2\geq 0,\cdots,b_{k-1}\geq 0,b_k\leq -1$．

进行一次变换 τ 后，排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 变换为 $a_k,a_1,a_2,\cdots a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n$，设该排列的生成列为 $b_1',b_2',\cdots,b_n'$．

所以 $(b_1'+b_2'+\cdots+b_n')-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=[g(a_1-a_k)+g(a_2-a_k)+\cdots+g(a_{k-1}-a_k)]-[g(a_k-a_1)+g(a_k-a_2)+\cdots+g(a_k-a_{k-1})]$

$=-2[g(a_k-a_1)+g(a_k-a_2)+\cdots+g(a_k-a_{k-1})]$

$=-2b_k\geq 2$．

因此，经过一次变换 τ 后，整个排列的各项满意指数之和将至少增加 2．

因为 a_i 的满意指数 $b_i\leq i-1$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n$，

所以，整个排列的各项满意指数之和不超过 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$，

即整个排列的各项满意指数之和为有限数，

所以经过有限次变换 τ 后，一定会使各项的满意指数均为非负数．………………15 分