北师大实验中学 2024-2025 学年第一学期开学摸底测验

高 二 数 学

2024 年 8 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题，共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知角 α 的终边经过点 $P(2,-1)$, 则 $\cos\alpha=$

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(B) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　(D) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=1-\mathrm{i}$, 则复平面内表示 z 的点在

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. $\cos 30^\circ\cos 15^\circ-\sin 30^\circ\sin 15^\circ$ 的值为

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) 1

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\sin C}$, 则 $\angle B=$

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 已知 l,m 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，下列命题正确的是

(A) 若 $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$, 则 $m\parallel\beta$　　(B) 若 $\alpha\cap\beta=l,l\parallel m$, 则 $m\parallel\beta$

(C) 若 $m\subset\alpha,\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\beta$　　(D) 若 $m\perp\alpha,\alpha\parallel\beta$, 则 $m\perp\beta$

6. 下列函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增的是

(A) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(B) $y=|\sin x|$　　(C) $y=\cos 2x$　　(D) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

7. 将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度，得到的图象关于点 $(\varphi,0)$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值为

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2,A=\dfrac{\pi}{3}$, 则下列说法正确的是

(A) 当 $b=1$ 时，$\triangle ABC$ 是锐角三角形　　(B) 当 $b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 是直角三角形

(C) 当 $b=\dfrac{7}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 是钝角三角形　　(D) 当 $b=\dfrac{5}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形

9. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“对于任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$, 都有 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$ 成立”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

10. 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐．一般早潮叫潮，晚潮叫汐．在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋．下面是某港口在某季节某天的时间与水深值（单位：m）的部分记录表.

时间	0 : 00	3 : 00	6 : 00	9 : 00	12 : 00
水深值	5. 0	7. 5	5. 0	2. 5	5.0

据分析，这个港口的水深值与时间的关系可近似地用三角函数来描述．试估计 13 : 00 的水深值为

(A) 3.75　　(B) 5.83　　(C) 6.25　　(D) 6.67

第二部分 (非选择题，共 110 分)

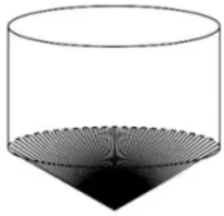
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$__________.

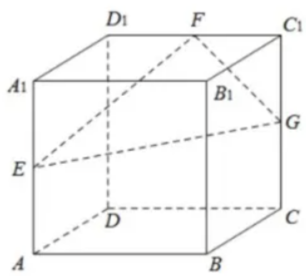
12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称，若角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\dfrac{3}{5},m\right)$, 则 $\cos\beta=$ __________.

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=60^\circ$, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BP}$, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=$ __________.

14. 陀螺是中国民间的娱乐工具之一，早期陀螺的形状由同底的一个圆柱和一个圆锥组合而成（如图）．已知一木制陀螺模型内接于一表面积为 $16\pi\ \mathrm{cm}^2$ 的球，其中圆柱的两个底面为球的两个截面，圆锥的顶点在该球的球面上，若圆柱的高为 2 cm, 则该圆柱的侧面积为__________cm^2, 该陀螺的体积为__________cm^3.



15. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别为棱 AA_1,C_1D_1,CC_1 的中点，动点 H 在平面 EFG 内，且 $DH=1$. 给出下列四个结论：



① $A_1B\,/\!/$ 平面 EFG;

② 点 H 轨迹的长度为 π;

③ 存在点 H, 使得直线 $DH\perp$ 平面 EFG;

④ 平面 EFG 截正方体所得的截面面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答题应写出文字说明，验算步骤或证明过程。

16.（13 分）

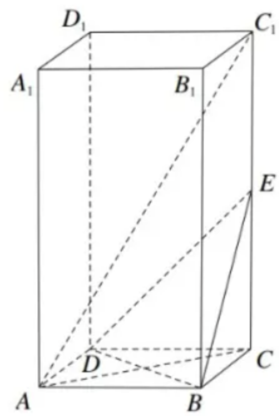
已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（I） 求 $f(0)$ 的值和 $f(x)$ 的零点；

（II） 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17.（14 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2, CC_1=4, E$ 为 CC_1 的中点.



（I） 求证：AC_1 ∥ 平面 EDB;

（II） 求证：平面 $EDB \perp$ 平面 ACC_1;

（III） 求点 C 到平面 EDB 的距离.

18.（14 分）

已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}, |\boldsymbol{b}|=1, <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\pi}{4}$.

（I） 求 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$;

（II） 若 $\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OA}$, 求 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$ 的最小值.

19.（14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$b+2c-2a\cos B=0$.

（I） 求 $\angle A$;

（II） 若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 a 的最小值.

20.（15 分）

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, AC=4, BC=5, D, E$ 分别为 AC, BC 的中点. 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折起到 $\triangle C_1DE$ 的位置，得到四棱锥 C_1-DABE, 如图 2.

（I） 求证：$DE \perp C_1A$;

（II） 若 M 是线段 C_1B 上的点，平面 DEM 与线段 C_1A 交于点 N, 再从条件①、条件①、条件①这三个条件中选择一个作为已知，使点 M 唯一确定，并解答问题.

i. 求证：N 为 C_1A 的中点；

ii. 求证：$C_1A \perp$ 平面 $DEMN$.

条件①: $C_1M=MB$;

条件②: $DE \parallel NM$;

条件③: $EM \perp C_1B$.

如果选择的条件不符合要求，第 (II) 问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

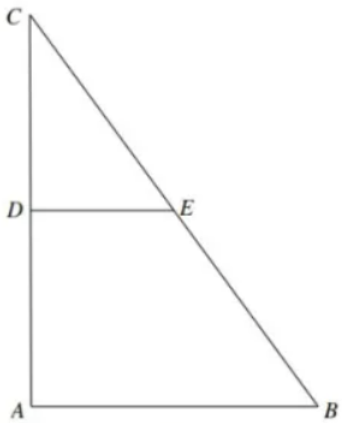


图 1

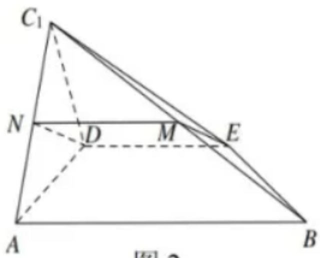


图 2

21.（15 分）

已知 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 给定 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, 定义变换 φ_k : 选取 $i\in\{0,1,\cdots n-1\}$, 再选取一个实数 x, 对 $\boldsymbol{a}$ 的坐标进行如下改变：

若此时 $i+k\leqslant n$, 则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k}$ 同时加上 x, 其余坐标不变;

若此时 $i+k>n$, 则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 及 $a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-n}$ 同时加上 x, 其余坐标不变.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 经过有限次变换 φ_k (每次变换所取的 i,x 的值可能不同) 后，最终得到的向量 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 满足 $t_1=t_2=\cdots=t_n$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 k 阶可等向量，

例如，向量 $(1,3,2)$ 经过两次变换 φ_2 可得：

$(1,3,2)\xrightarrow{i=2,x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,x=-1}(2,2,2)$, 所以 $(1,3,2)$ 是 2 阶可等向量.

（I） 判断 $(1,2,3)$ 是否是 2 阶可等向量？说明理由；

（II） 若取 1,2,3,4 的一个排序得到的向量 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是 2 阶可等向量，求 a_1+a_3;

（III） 若任取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排序得到的 n 维向量均为 k 阶可等向量，则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 k 阶强可等向量. 求证：向量 $(1,2,3,4,5,6,7)$ 是 5 阶强可等向量.

答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	B	D	B	A	B	C	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $\sqrt{2}$.

12. $-\dfrac{3}{5}$.

13. -1.

14. $4\sqrt{3}\pi, 7\pi$.

15. ①②④.

14 题第一个空 2 分，第二个空 3 分，15 题的采分点为 0,3,5 分，有错误不给分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答题应写出文字说明，验算步骤或证明过程。

16. 解：(I) $f(0)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$ ……3 分

$f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos x$

$=\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ……7 分

令 $x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$, 所以 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)$ 的零点为 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$ ……9 分

(II) 因为 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), k\in\mathbf{Z}$

所以 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$. ……11 分

所以 $2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\dfrac{2\pi}{3}, 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right), k\in\mathbf{Z}$ ……13 分

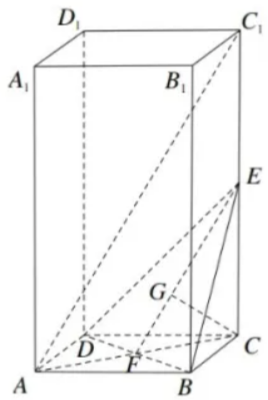
17. 解：(I) 设 $AC\cap BD=F$, 连接 EF.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 为 AC 的中点，

又因为 E 为 CC_1 的中点，所以 $EF\parallel AC_1$.

又 $AC_1\not\subset$ 平面 EDB, $EF\subset$ 平面 EDB,

所以 $AC_1\parallel$ 平面 EDB. ……5 分



(II) 因为 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $CC_1 \perp BD$.

因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC$,

所以底面 $ABCD$ 为正方形. 所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AC \cap CC_1 = C$, 所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1.

又因为 $BD \subset$ 平面 EDB, 所以平面 $EDB \perp$ 平面 ACC_1. ························ 10 分

(III) 在 $\triangle EFC$ 中，过 C 作 $CG \perp EF$, 垂足为 G.

因为平面 $EDB \perp$ 平面 ACC_1, 平面 $EDB \cap$ 平面 $ACC_1 = EF, CG \subset$ 平面 ACC_1,

所以 $CG \perp$ 平面 EDB.

因为 $AB=BC=2$, 所以 $FC=\sqrt{2}$.

因为 $CC_1=4, E$ 为 CC_1 的中点，所以 $EC=2$.

在 $Rt\triangle EFC$ 中，$EF=\sqrt{FC^2+EC^2}=\sqrt{6}$.

所以 $CG=\dfrac{FC \cdot EC}{EF}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故点 C 到平面 EDB 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ·· 14 分

18. 解：(I) 因为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}$ ·· 2 分

$=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}$ ··· 4 分

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=1$ ·· 6 分

所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{2-4+4}=\sqrt{2}$ ·· 7 分

(II) 因为 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})=(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})\cdot(t\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=(t^2-t)\overrightarrow{OA}^2-(t-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2(t^2-t)-(t-1)=2t^2-3t+1$ ··············· 11 分

$=2\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}\geqslant-\dfrac{1}{8}$

所以当 $t=\dfrac{3}{4}$ 时，$\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB})$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{8}$ ······························· 14 分

19. 解：(I) 因为 $b+2c-2a\cos B=0$.

所以 $b+2c-2a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=0$. 所以 $bc+c^2-a^2+b^2=0$.

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 7 分

(II) 因为 $\triangle ABC$ 的面积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

由 (I) 知 $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $bc=2$.

由 (I) 知 $a^2=bc+c^2+b^2\geqslant 3bc$ (当且仅当 $b=c=\sqrt{2}$ 时，取等号)

所以 a 的最小值为 $\sqrt{6}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 14 分

20. 解:(I) 因为在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3, AC=4, BC=5$,

所以 $AB\perp AC$.

因为 D,E 分别为 AC,BC 的中点

所以 $DE\parallel AB$. 所以 $DE\perp AC$.

所以 $DE\perp C_1D, DE\perp AD$.

又因为 $C_1D\cap AD=D$, 所以 $DE\perp$ 平面 C_1AD.

又因为 $C_1A\subset$ 平面 C_1AD, 所以 $DE\perp C_1A$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

(II) 选择条件①: $C_1M=MB$.

(i) 因为因为 $DE\parallel AB$, 又因为 $DE\not\subset$ 平面 $C_1AB, AB\subset$ 平面 C_1AB,

所以 $DE\parallel$ 平面 C_1AB.

又因为 $DE\subset$ 平面 $DEMN$, 平面 $DEMN\cap$ 平面 $C_1AB=NM$,

所以 $DE\parallel NM$.

又因为 $DE\parallel AB$, 所以 $NM\parallel AB$.

因为 $C_1M=MB$, 所以 $C_1N=NA$. 即 N 为 C_1A 的中点 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10 分

(ii) 因为 $DC_1=DA$, 由 (i) 得 $C_1N=NA$,

所以 $DN\perp C_1A$.

由 (I) 得 $DE\perp C_1A$, 又因为 $DN\cap DE=D$,

所以 $C_1A\perp$ 平面 $DEMN$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15 分

选择条件③:$EM\perp C_1B$.

又因为 $EC_1=EB$, 所以 $C_1M=MB$.

以下同选条件①.

21. 解：(I) $(1,2,3)$ 是 2 阶可等向量， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 分

例如经过两次变换 φ_2 可得：$(1,2,3) \xrightarrow{i=3,x=1} (2,3,3) \xrightarrow{i=1,x=-1} (2,2,2)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4 分

(II) 设 (a_1,a_2,a_3,a_4) 进行一次变换 φ_2 后得 (a_1',a_2',a_3',a_4')，

当 $i=0$ 时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1+x,a_2+x,a_3,a_4)$

当 $i=1$ 时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1,a_2+x,a_3+x,a_4)$

当 $i=2$ 时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1,a_2,a_3+x,a_4+x)$

当 $i=3$ 时，$(a_1',a_2',a_3',a_4')=(a_1+x,a_2,a_3,a_4+x)$

综上，我们得到 $(a_1'+a_3')-(a_2'+a_4')=(a_1+a_3+x)-(a_2+a_4+x)=(a_1+a_3)-(a_2+a_4)$.

因为 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是 2 阶可等向量，即 $t_1=t_2=t_3=t_4$

所以 $(a_1+a_3)-(a_2+a_4)=(t_1+t_3)-(t_2+t_4)=0$.

所以 $a_1+a_3=a_2+a_4=\dfrac{a_1+a_3+a_2+a_4}{2}=\dfrac{1+2+3+4}{2}=5$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 9 分

(III) 任取 $(1,2,\cdots,7)$ 的一个排序，记为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_7)$.

注意到，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 k 阶可等向量，等价于 $(a_1+y,a_2+y,\cdots,a_n+y)$ 是 k 阶可等向量

变换 φ_5 即对连续五个维度的坐标（首尾也看成连续）同时加上 x，相当于对剩余两个连续维度的坐标同时加上 $-x$.

对 $b_2,b_3;b_4,b_5;b_6,b_7$ 依次加上 $-x$，相当于对 b_1 单独加上 x；

对 $b_3,b_4;b_5,b_6;b_7,b_1$ 依次加上 $-x$，相当于对 b_2 单独加上 x；

基于上述分析，相当于可以对 $b_1,b_2,\cdots,b_7$ 分别单独加上 $-b_1,-b_2,\cdots,-b_7$.

所以 $\boldsymbol{b}$ 为 5 阶可等向量，$(1,2,\cdots,7)$ 为 5 阶强可等向量 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15 分