2024 北京清华附中朝阳学校高三（上）开学考

数　　学

班级__________　　姓名__________________________

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分.

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\left\{x\mid x=n^2,n\in A\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{1,2\}$　　B．$\{1,4\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{9,16\}$

2． 命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$”的否定是

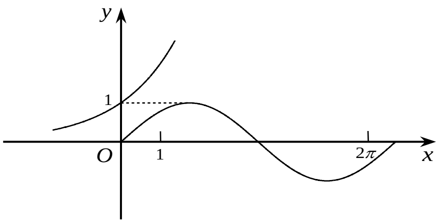
A． $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0\neq x_0-1$　　B． $\exists x_0\notin(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$

C． $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$　　D． $\forall x\notin(0,+\infty)$，$\ln x=x-1$

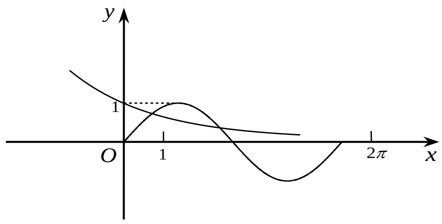
3．下列函数中，是偶函数，且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的为

A． $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=\ln|x|$　　C． $y=-\lg x$　　D． $y=1-|x|$

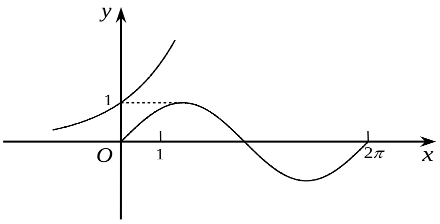
4.在同一个坐标系中画出函数 $y=a^x,y=\sin ax$ 的部分图象，其中 $a>0$且$a\neq 1$，则下列所给图象中可能正确的是



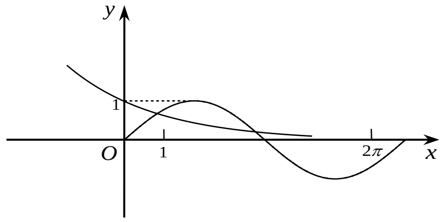
A



B

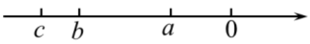


C



D

5.已知实数 a，b，c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是



A． $b-a<c+a$　　B． $c^2<ab$

C． $\dfrac{c}{b}>\dfrac{c}{a}$　　D． $|b|c<|a|c$

6.若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A． $\dfrac{\pi}{2}$　　B． $\dfrac{2\pi}{3}$　　C． $\dfrac{3\pi}{4}$　　D． $\dfrac{5\pi}{6}$

7．已知$x_1=\log_{\frac{1}{3}}2$，$x_2=2^{-\frac{1}{2}}$，x_3满足$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}=\log_3 x_3$，则

A．$x_1<x_2<x_3$　　B．$x_1<x_3<x_2$　　C．$x_2<x_1<x_3$　　D．$x_3<x_1<x_2$

8.已知实数α，β．“$\alpha+\beta=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$”是”$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9.函数$f(x)=x$，$g(x)=x^2-x+3$.若存在$x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,\frac{9}{2}]$，使得$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+g(x_n)=g(x_1)+g(x_2)+\ldots+g(x_{n-1})+f(x_n)$，则$n$的最大值为

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

10.已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2, x\geq a,\\ |x+a|, \quad x<a.\end{cases}$若对于任意正数$k$，关于$x$的方程$f(x)=k$都恰有两个不相等的实数根，则满足条件的实数$a$的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）　无数

二.填空题（本题共5小题，每小题5分，共25分）

11．如图所示，在平面直角坐标系xOy中，角α的终边与单位圆交于点A在第二象限，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则点A的坐标为__________.

12.已知函数$f(x)$是R上的奇函数，并且是周期为3的周期函数，若$f(1)=2$，则$f(2)=$________；$f(2019)=$________.

13．已知$a>1$，则$a+\frac{100}{a-1}$的最小值为_________,此时a等于______.

14．已知函数$f(x)=\sin x$，若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)+f(x+m)=0$，则常数m的一个取值为______.

15.已知$f(x)=ax^2-2x-b\ln|x-1|$，给出以下命题:

① 当$a=0$时，存在$b>0$，$f(x)$有两个不同的零点

② 当$a=0$时，存在$b<0$，$f(x)$有三个不同的零点

③ 当$a=1$时，对任意的$b\in R$，$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称

④ 当$a=1$时，对任意的$b\in R$，$f(x)$有且只有两个零点

其中所有正确的命题序号是___________.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16、（本小题满分13分）已知函数$f(x)=\cos x\left(2\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-\sin^2 x$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期和单调递增区间；

（Ⅱ）若$f(x)$在区间$[0,m]$上有且只有两个零点，求m的取值范围.

17.（本小题共 14 分）某公司在 2013~2021 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示：

年　　份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年生产台数（单位：万台）	3	4	5	6	6	9	10	10	a
年返修台数（单位：台）	32	38	54	58	52	71	80	75	b
年利润（单位：百万元）	3.85	4.50	4.20	5.50	6.10	9.65	10.00	11.50	c

注：年返修率 $=\frac{\text{年返修台数}}{\text{年生产台数}}$.

（Ⅰ）从 2013~2020 年中随机抽取一年，求该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率；

（Ⅱ）公司规定：若年返修率不超过千分之一，则该公司生产部门当年考核优秀. 现从 2013~2020 年中随机选出 3 年，记 ξ 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数，求 ξ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记公司在 2013~2015 年，2016~2018 年，2019~2021 年的年生产台数的方差分别为 ${s_1}^2$， ${s_2}^2$， ${s_3}^2$. 若 ${s_3}^2\le\max\left\{{s_1}^2,{s_2}^2\right\}$，其中 $\max\{s_1^2,s_2^2\}$ 表示 s_1^2,s_2^2 这两个数中最大的数．请写出 a 的最大值和最小值.（只需写出结论）

18. （本小题满分 13 分）在 ΔABC 中，$\angle B\ne\frac{\pi}{2}$，$\cos 2B=\sqrt{3}\cos B-1$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得 ΔABC 存在且唯一确定，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\sin A=\sqrt{3}\sin C$，$b=2$；条件②：$AC=\sqrt{6}$，BC 边上的高为 2；

条件③：$2b=3a$，$b\sin A=1$.

注：如果选择的条件不符合要求，第二问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，则按第一个解答计分.

19.（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+2$，求 a；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，求证：$(a-1)x_0>a$.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

21.（本小题共 15 分）

在平面直角坐标系中，O 为坐标原点．对任意的点 $P(x,y)$，定义 $\|OP\|=|x|+|y|$．

任取点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，记 $A'(x_1,y_2),B'(x_2,y_1)$，若此时 $\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|OA'\|^2+\|OB'\|^2$ 成立，则称点 A,B 相关．

（Ⅰ）分别判断下面各组中两点是否相关，并说明理由；

① $A(-2,1),B(3,2)$；　　② $C(4,-3),\ D(2,4)$．

（Ⅱ）给定 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 3$，点集 $\Omega_n=\{(x,y)\,|\,-n\leq x\leq n,-n\leq y\leq n,x,y\in\mathbf{Z}\}$．

（ⅰ）求集合 Ω_n 中与点 $A(1,1)$ 相关的点的个数；

（ⅱ）若 $S\subseteq\Omega_n$，且对于任意的 $A,B\in S$，点 A,B 相关，求 S 中元素个数的最大值．

参考答案

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	B	D	D	C	A	A	D	B

二、**填空题**（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

12、-2， 0

13. 21；11

14. π

15、①②③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.

16、（本小题满分 13 分）

无答案

17. **解**：（Ⅰ）由图表知，2013~2020 年中，产品的平均利润小于 100 元/台的年份只有 2015 年，2016 年.

所以 从 2013~2020 年中随机抽取一年，该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率为 $\frac{6}{8}=0.75$.

（Ⅱ）由图表知，2013~2020 年中，返修率超过千分之一的年份只有 2013，2015 年，

所以 ξ 的所有可能取值为 $1, 2, 3$.

$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$， $P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$， $P(\xi=3)=\frac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

故 ξ 的数学期望 $E(\xi)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$.

（Ⅲ） a 的最大值为 13，最小值为 7.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\cos 2B=\sqrt{3}\cos B-1$,

所以 $2\cos^2 B-1=\sqrt{3}\cos B-1$.　　　　　　……2 分

所以 $\cos B(2\cos B-\sqrt{3})=0$.

因为 $\angle B\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos B\neq 0$.

所以 $2\cos B-\sqrt{3}=0$，解得 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　　……4 分

又因为 $0<B<\pi$．　　……5 分

所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{6}$．　　……6 分

（Ⅱ）若选择条件① $\sin A=\sqrt{3}\sin C$， $b=2$．

在 ΔABC 中，因为 $\sin A=\sqrt{3}\sin C$，

因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $a=\sqrt{3}c$．　　……2 分

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以 $3c^2+c^2-3c^2=4$，解得 $c=2$．　　……5 分

所以 $a=2\sqrt{3}$．　　……6 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$．　　……8 分

若选择条件② $AC=\sqrt{6}$， BC 边上的高为 2．

在 ΔABC 中，因为 $\angle B=\dfrac{\pi}{6}$， BC 边上的高为 2，

所以 $AB=4$．

因为 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，

所以 $\sin C=\dfrac{AB\sin B}{AC}$，即 $\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

因为 $AB>AC$， $\angle C>\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle C$ 为锐角或钝角， ΔABC 不唯一确定．

若选择条件③ $2b=3a$， $b\sin A=1$

方法一：

因为 $2b=3a$，

所以 $2\sin B=3\sin A$，即 $\sin A=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$．

因为 $b\sin A=1$,所以 $b=3$， $a=\dfrac{2}{3}b=2$．

因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以 $c^2-2\sqrt{3}c-5=0$．解得 $c=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ 或 $c=\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ （舍去）

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$．

方法二：

在 ΔABC 中，因为 $2b=3a$，所以 $2\sin B=3\sin A$，即 $\sin A=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$．

因为$b\sin A=1$，所以$b=3$，$a=\frac{2}{3}b=2$，

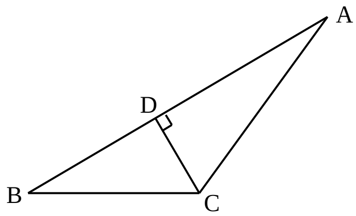
过C作$CD\perp AB$于D，即$CD=b\sin A=1$.

在$Rt\Delta ADC$中，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=2\sqrt{2}$.

在$Rt\Delta BDC$中，$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{3}$.

所以$AB=AD+DB=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+2\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}$.



19.解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x-a\ln x$，

所以 $f'(x)=1-\frac{a}{x}$.

所以 $f'(1)=1-a$.

又因为 $f(1)=1$，

所以 曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=(1-a)(x-1)$，即$y=(1-a)x+a=-x+2$．所以a=2

（Ⅱ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$.

当$a\le 0$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$.

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=a$.

$f(x)$与$f'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的情况如下：

x	$(0,a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0,a)$，单调递增区间为$(a,+\infty)$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知：

①当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

所以 $f(x)=0$至多有一个实根，不符合题意.

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)=a-a\ln a$.

若 $f(a)\geq 0$，则 $f(x)\geq 0$，所以 $f(x)=0$ 至多有一个实根，不符合题意.

若 $f(a)<0$，即 $a-a\ln a<0$，得 $a>\mathrm{e}$.

又 $f(1)=1>0$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有唯一零点.

因为 方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，且较小的实数根为 x_0，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上的唯一零点就是 x_0.

方法一：

所以 $x_0-a\ln x_0=0$，$x_0\in(1,a)$.

所以 $a=\dfrac{x_0}{\ln x_0}$.

所以 “$(a-1)x_0>a$” 等价于 “$(\dfrac{x_0}{\ln x_0}-1)x_0>\dfrac{x_0}{\ln x_0}$”，即 $x_0-\ln x_0>1$.

由（Ⅱ）知，当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $f(1)=1$.

又因为 $x_0\neq 1$，所以 $x_0-\ln x_0>1$.

所以 $(a-1)x_0>a$.

方法二：

“$(a-1)x_0>a$” 等价于 “$x_0>\dfrac{a}{a-1}$”.

又 $\dfrac{a}{a-1}-a=\dfrac{-a^2+2a}{a-1}=\dfrac{-a(a-2)}{a-1}<0$，

所以 $\dfrac{a}{a-1}<a$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，

所以 “$x_0>\dfrac{a}{a-1}$” 等价于 “$f(x_0)<f(\dfrac{a}{a-1})$”，

即 $f(\dfrac{a}{a-1})=\dfrac{a}{a-1}-a\ln\dfrac{a}{a-1}>0$. (*)

因为 $a>\mathrm{e}$，

令 $t=\dfrac{a}{a-1}$，则 $t>1$，$a=\dfrac{t}{t-1}$.

即 (*) 等价于 $t-\dfrac{t}{t-1}\ln t>0$，即 $t-1-\ln t>0$.

所以 “$(a-1)x_0>a$” 等价于“$t-1-\ln t>0$”.

令 $g(t)=t-1-\ln t$，$t>1$.

所以 $g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$.

当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(t)>g(1)$，而 $g(1)=0$.

所以 $t-1-\ln t>0$ 成立.

所以 $(a-1)x_0>a$.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$a=2$，所以 $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2},$$ ……2 分

所以切线斜率为 $k=f'(1)=0$，又切点为 $(1,0)$，

所以切线方程为 $y=0$.

（Ⅱ）$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a(x+1)-a(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-2ax}{x(x+1)^2},$$ ……1 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $(x+1)^2-2ax\geqslant 0$ 恒成立，

即 $a\leqslant\dfrac{(x+1)^2}{2x}=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x}+2)$ 恒成立. ……2 分

又 $\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x}+2)\geqslant\dfrac{1}{2}(2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+2)=2$，

当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，$\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{x}+2)$ 有最小值 2，

所以 $a\leqslant 2$. ……5 分

经检验，$a\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

（Ⅲ）当 $a\leqslant 2$ 时，由（Ⅱ）知，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有一个零点 $x=1$. ……2 分

当 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x^2+2(1-a)x+1=0$，

$\Delta=4(1-a)^2-4=4a(a-2)>0$，故设两根为 x_1,x_2，

因为 $x_1+x_2=2(a-1)>0$ 且 $x_1\cdot x_2=1$，所以 $0<x_1<1<x_2$，

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
	增	极大	减	极小	增

因为 $f(1)=0$，所以 $f(x_1)>0$ 且 $f(x_2)<0$，

又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}\in(-1,1)$，

取 $x=\mathrm{e}^{-a}\in(0,1)$，有 $f(\mathrm{e}^{-a})<-a-a\times(-1)=0$，

再取 $x=\mathrm{e}^{a}\in(1,+\infty)$，有 $f(\mathrm{e}^{a})>a-a\times1=0$．

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 各有一个零点，且 $f(1)=0$，共 3 个零点；

综上，当 $a\leqslant2$ 时，$f(x)$ 的零点个数为 1；当 $a>2$ 时，$f(x)$ 的零点个数为 3.

（21）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）①由题知 $A'(-2,2),B'(3,1)$，进而有

$\|OA\|^2+\|OB\|^2=(2+1)^2+(3+2)^2=34$，

$\|OA'\|^2+\|OB'\|^2=(2+2)^2+(3+1)^2=32$，

所以 $\|OA\|^2+\|OB\|^2\geq\|OA'\|^2+\|OB'\|^2$．

所以 A,B 两点相关；

②由题知 $C'(4,4),D'(2,-3)$，进而有

$\|OC\|^2+\|OD\|^2=(4+3)^2+(2+4)^2=85$，

$\|OC'\|^2+\|OD'\|^2=(4+4)^2+(2+3)^2=89$，

所以 $\|OC\|^2+\|OD\|^2<\|OC'\|^2+\|OD'\|^2$，

所以 C,D 两点不相关.

（Ⅱ）（ⅰ）设 $A(1,1)$ 的相关点为 $B(x,y)$，$x,y\in\mathbf{Z}$，$-n\le x\le n,-n\le y\le n$，

由题意，$A'(1,y)$，$B'(x,1)$．

因为点 A,B 相关，则 $4+x^2+y^2+2|x||y|\geq1+y^2+2|y|+1+x^2+2|x|$．

所以 $|x||y|-|x|-|y|+1\geq0$．

所以 $(|x|-1)(|y|-1)\geq0$．

当 $x=0$ 时，$|y|\in\{0,1\}$，则 $A(1,1)$ 相关点的个数共 3 个；

当 $|x|=1$ 时，则 $A(1,1)$ 相关点的个数共 $4n+2$ 个；

当 $|x|\geq2$ 时，$|y|\geq1$，则 $A(1,1)$ 相关点的个数共 $4n(n-1)$ 个.

所以满足条件点 B 共有 $4n(n-1)+4n+2+3=4n^2+5$（个）.

（ii）集合 S 中元素个数的最大值为 $8n-1$.

$S=\{(0,0),(0,\pm1),(\pm1,\pm1),\cdots(\pm1,\pm n),(\pm2,\pm n),\cdots,(\pm n,\pm n)\}$ 符合题意

下证：集合 S 中元素个数不超过 $8n-1$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，若点 A,B 相关，则

$x_1^2+y_1^2+2|x_1||y_1|+x_2^2+y_2^2+2|x_2||y_2|$

$\geq x_1^2+y_2^2+2|x_1||y_2|+x_2^2+y_1^2+2|x_2||y_1|$.

则 $|x_1y_1|+|x_2y_2|\geq|x_1y_2|+|x_2y_1|$.

所以 $(|x_1|-|x_2|)(|y_1|-|y_2|)\geq 0$.

设集合 S 中共有 m 个元素，分别为 $A_i(x_i,y_i)$，$1\leq i\leq m$，$i\in N^*$，

不妨设 $|x_1|\leq|x_2|\leq\cdots|x_m|$，而且满足当 $|x_i|=|x_{i+1}|$，$|y_i|\leq|y_{i+1}|$.

下证：$|y_1|\leq|y_2|\leq\cdots\leq|y_m|$.

若 $|x_i|=|x_{i+1}|$，$|y_i|\leq|y_{i+1}|$.

若 $|x_i|<|x_{i+1}|$，则必有 $|y_i|\leq|y_{i+1}|$.

记，$d_i=|x_{i+1}|+|y_{i+1}|-|x_i|-|y_i|$，$1\leq i\leq m-1$，$i\in\mathbf{N}^*$，

显然，数列 $\{d_i\}$ 至多连续 3 项为 0，必有 $d_i+d_{i+1}+d_{i+2}+d_{i+3}\geq 1$，

假设 $m>8n-1$，

则 $d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=d_1+d_2+d_3+(d_4+\cdots+d_{8n-1})\geq 2n-1$.

而 $d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=|x_{8n}|-|x_1|+|y_{8n}|-|y_1|\geq 2n-1$，

因此，必有 $x_1=0$ 或 $y_1=0$.

可得，d_1,d_2 不可能同时为 0，则 $d_1+d_2\geq 1$.

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_{8n-1}=(d_1+d_2)+d_3+(d_4+\cdots+d_{8n-1})\geq 2n$.

必有 $|x_{8n}|=|y_{8n}|=n$，$x_1=y_1=0$.

所以，$d_1=1$，$d_2=d_3=0$.

因此 $|x_2|+|y_2|=1$，$|x_3|+|y_3|=1$，$|x_4|+|y_4|=1$.

若 $|x_2|=1$，则 $A_2,A_3,A_4\in\{(1,0),(-1,0)\}$，矛盾.

同理，$|y_2|=1$，矛盾.

因此，假设不成立.

所以 $m\leq 8n-1$.

所以集合 S 中元素个数的最大值为 $8n-1$.