北京市大峪中学2024—2025学年度第一学期定位考试卷

数学　　　　2024.09

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.已知全集 $U=\{x|-2\le x\le 2\}$，集合 $A=\{x|-1\le x<2\}$，则 $\complement_U A=$

A．$(-2,-1)$　　B.$[-2,-1]$　　C.$(-2,-1)\cup\{2\}$　　D.$[-2,-1)\cup\{2\}$

2. 已知复数 $z=(m^2-1)+(m+1)i$ 是纯虚数，则实数 $m=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 0

3. 下列函数中，既是奇函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=\dfrac{1}{x}$　　C. $y=x|x|$　　D. $y=\tan x$

4. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)\vec{b}=(3,x)$，$\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 共线，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$（　　）

A. 6　　B. $2\sqrt{5}$　　C.20　　D. 5

5. 已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）.

A．$(-1,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

6. 若两条直线 $l_1: y=2x+m$，$l_2: y=2x+n$ 与圆 $x^2+y^2-4x=0$ 的四个交点能构成正方形，则 $|m-n|=$（　　）

A．$4\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{10}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D. 4

7. 设 $a>0$，$b>0$，则“$\lg(a+b)>0$”是“$\lg(ab)>0$”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

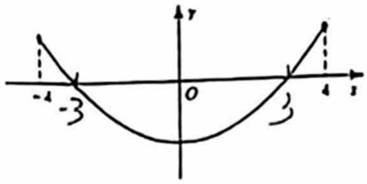
C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

8. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$，$a_1=b_1=-4$，$a_4=2$，$a_5=8b_4$，$m\in\mathbf{N}^*$,则满足 $a_m\cdot b_m>1$ 的数值 m

A. 有且仅有1个值　　B. 有且仅有2个值　　C. 有且仅有3个值　　D. 有无数多个值

9.函数 $f(x)$ 是定义在 $(-4,4)$ 上的偶函数，其图象如图所示，$f(3)=0$．设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导

函数，则关于 x 的不等式 $f(x+1)\cdot f'(x)\geq 0$



的解集是

A. $[0,2]$　　B. $[-3,0]\cup[3,4)$

C. $(-4,0]\cup[2,3)$　　D. $(-5,0]\cup[2,4)$

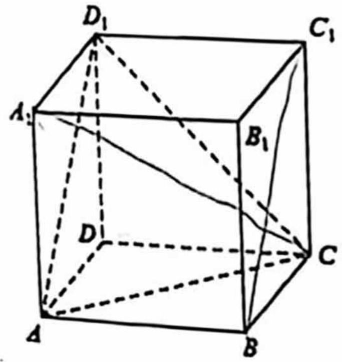
10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为线段 BC_1 上的动点，则下列结论正确的个数是

①三棱 $A-D_1PC$ 锥的体积为定值；

②直线 AP 与平面 ACD_1 所成的角的大小不变；

③直线 AP 与 A_1D 所成的角的大小不变；

④ $A_1C\perp DP$.



A.①②③　　B. ②③④　　C. ①②④　　D.①③④

第二部分（非选择题　共 110 分）

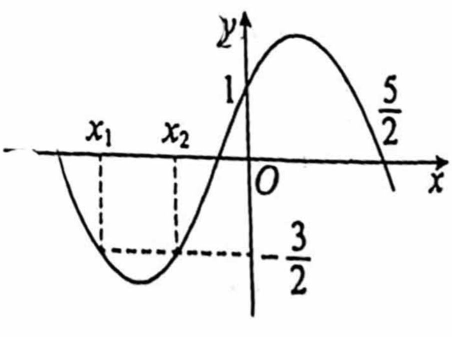
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是________.

12. 在 $(x-\dfrac{2}{x^2})^6$ 的展开式中，常数项为________.

13. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与该抛物线交于 A，B 两点，$|AB|=10$，AB 的中点横坐标为 4，则 $p=$________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图，$f(x_1)=f(x_2)=-\dfrac{3}{2}$，则 $x_1+x_2=$________，$\cos\left[\dfrac{\pi}{6}(x_1-x_2)\right]=$________.



15. 若函数 $f(x)$ 的图象上存在不同的两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，坐标满足关系：$|x_1x_2+y_1y_2|\geq\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，则称函数 $f(x)$ 与原点关联. 给出下列函数：

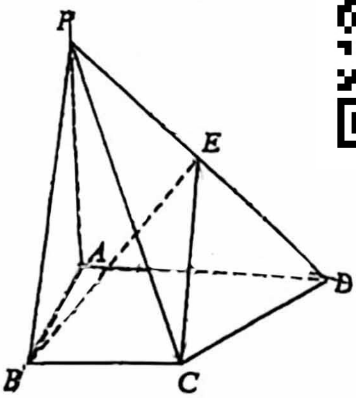
①$f(x)=2x$；　　②$f(x)=\sin x$；　　③$f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x>0)$；　　④$f(x)=\ln x$.

其中与原点关联的所有函数为____________（填上所有正确答案的序号）. [

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AD//BC$，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，$PA=AB=2$，E 为棱 PD 的中点.



（1）求证：$EC//$ 平面 PAB；

（2）当 $PC=3$ 时，求直线 PC 与平面 BCE 所成角的正弦值.

17.（本小题 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 所对的边，且满足 $\sin A\cos\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）试从条件①②③中选出两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，写出你的选择__________，并以此为依据求 $\triangle ABC$ 的面积.（注：只需写出一个选定方案即可）

条件①：$a=2$；条件②：$B=\dfrac{\pi}{4}$；条件③：$c=\sqrt{3}b$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（本小题 13 分）

每年 8 月 8 日为我国的全民健身日，倡导大家健康、文明、快乐的生活方式．为了激发学生的体育运动兴趣，助力全面健康成长，某中学组织全体学生开展以体育锻炼为主题的实践活动．为了解该校学生参与活动的情况，随机抽取 100 名学生作为样本，统计他们参加体育锻炼活动时间(单位:分钟)，得到下表：

类别 \ 人数 \ 时间		[0,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
性别	男	5	12	13	8	9	8
	女	6	9	10	10	6	4
学段	初中						
	高中	m	13	12	7	5	4

(1) 从该校随机抽取 1 名学生，若已知抽到的是女生，估计该学生参加体育锻炼活动时间在 $[50,60)$ 的概率；

(2) 从参加体育锻炼活动时间在 $[80,90)$ 和 $[90,100)$ 的学生中各随机抽取 1 人，其中初中学生的人数记为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(3)假设同组中每个数据用该组区间中点值代替，样本中的 100 名学生参加体育锻炼活动时间的平均数记为 μ_0，初中、高中学生参加体育锻炼活动时间的平均数分别记为 μ_1,μ_2．写出一个 m 的值，使得 $\mu_0=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ (结论不要求证明)

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，A,B 分别是 E 的左、右顶点，P 是 E 上异于 A,B 的点，$\triangle APB$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$．

（1）求 E 的方程；

（2）设 O 为原点，点 N 在直线 $x=2$ 上，N,P 分别在 x 轴的两侧，且 $\triangle APB$ 与 $\triangle NBP$ 的面积相等．

（i）求证：直线 ON 与直线 AP 的斜率之积为定值；

（ii）是否存在点 P 使得 $\triangle APB\cong\triangle NBP$，若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，说明理由．

20. （本小题 15 分）

设函数 $f(x)=px-\dfrac{p}{x}-2\ln x$，其中 e 是自然对数的底数.

（1）当 $p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值.

（2）若 $f(x)$ 在其定义域内为单调函数，求实数 p 的取值范围.

（3）设 $g(x)=\dfrac{2\mathrm{e}}{x}$，若在 $[1,\mathrm{e}]$ 上至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$ 成立，求实数 p 的取值范围.

21.（本小题 15 分）

若有穷自然数数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n \geqslant 2)$ 满足如下两个性质，则称 A 为 B_n 数列：

① $a_k \geqslant \max\{a_1 + a_{k-1}, a_2 + a_{k-2}, \cdots, a_{k-1} + a_1\}\ (k = 2, 3, \cdots, n)$，其中，$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最大的数；

② $a_k \leqslant \min\{a_1 + a_{k-1}, a_2 + a_{k-2}, \cdots, a_{k-1} + a_1\} + 1\ (k = 2, 3, \cdots, n)$，其中，$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最小的数.

（1）判断 $A: 2, 4, 6, 7, 10$ 是否为 B_5 数列，说明理由；

（2）若 $A: a_1, a_2, \cdots, a_6$ 是 B_6 数列，且 a_1, a_2, a_3 成等比数列，求 a_6；

（3）证明：对任意 B_n 数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n \geqslant 2)$，存在实数 λ，使得 $a_k = [k\lambda]\ (k = 1, 2, \cdots, n)$.

（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）