北师大实验中学高三第一学期统一练习
高三数学

试卷说明：

1．本次考试时间 120 分钟，总分 150 分.

2．试卷共有三道大题，21 道小题.

3．请将全部答案答在答题纸上.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．每题只有一个正确答案,将正确答案的序号填在答题纸上

1．已知集合 $A=\{x\mid -4<x<2\}$，$B=\{x\mid x^2\leqslant 9\}$，则 $A\cup B=$

A．$(-4,3]$　　B．$[-3,2)$　　C．$(-4,2)$　　D．$[-3,3]$

2．若复数 $z=(m+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\ (m\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $m=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3．在 $(x-\dfrac{1}{x^2})^4$ 的展开式中，x 的系数为

A．-4　　B．4　　C．-6　　D．6

4．下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A．$f(x)=-\ln x$　　B．$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$　　C．$f(x)=-\dfrac{1}{x}$　　D．$f(x)=3^{|x-1|}$

5．设 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq 0$，且 $a>b$，则

A．$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$　　B．$\left|\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right|>2$　　C．$\sin(a-b)<a-b$　　D．$3^a>2^b$

6．已知圆 C 过点 $A(-1,2),B(\ ,0)$，则圆心 C 到原点距离的最小值为

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

7．已知正方形 $ABCD$ 的边长为2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值为

A．2　　B．-4　　C．4　　D．$2\sqrt{2}$

8．已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$．则“$f(-1)=f(1)$”是“$f(x)$ 为偶函数”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9. 已知以边长为4的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱长分别为4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+3, & x\leqslant 0,\\ (x-2)^2, & 0<x\leqslant a\end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集，则正数 a 取值范围是

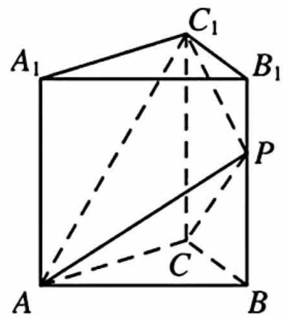
A. $(0,1]$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,4)$　　D. $(2,4)$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分．把答案填在答题纸上．

11. 抛物线 $y^2=2x$ 的焦点坐标为_______.

12. 点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称，写出一个符合题意的 $\theta=$___.

13. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 BB_1 上一点，$AB=AA_1=2$，则三棱锥 $P-ACC_1$ 的体积为________.



14. 设 O 为原点，双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的右支上．则 C 的渐近线方程是______；$\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的取值范围是_______.

15. 对于数列 $\{a_n\}$，令 $T_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n$，给出下列四个结论：

①若 $a_n=n$，则 $T_{2023}=1012$；

②若 $T_n=n$，则 $a_{2022}=-1$；

③存在各项均为整数的数列 $\{a_n\}$，使得 $|T_n|>|T_{n+1}|$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立；

④若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $|T_n|<M$，则有 $|a_{n+1}-a_n|<2M$．

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题:本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

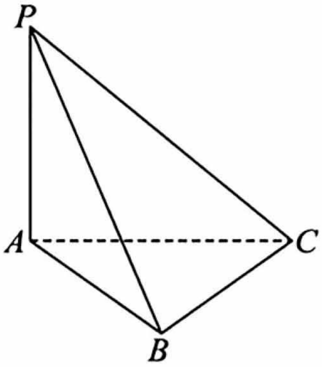
16. （本小题满分 13 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，

$PA=AB=BC=1$，$PC=\sqrt{3}$．

（1）求证：$BC\perp$ 平面PAB；

（2）求二面角 $A-PC-B$ 的大小．



17. （本小题满分 13 分）

在 ΔABC 中，$b\sin 2A=\sqrt{3}a\sin B$．

（I）求 $\angle A$；

（II）若 ΔABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一确定，求 a 的值．

条件①：$\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$；条件②：$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；条件③：$\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

注：如果选择的条件不符合要求，第（II）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

18. （本小题满分 14 分）

H 地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据，得到频率分布直方图（如图 1），考虑到受市场影响，预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表 1（该预测价格与亩产量互不影响）．

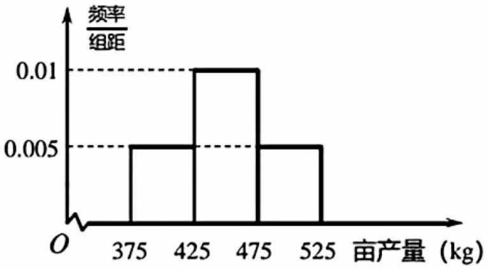


图 1

明年冬小麦统一收购价格（单位：元/kg）	2.4	3
概率	0.4	0.6

表 1

假设图 1 中同组的每个数据用该组区间的中点值估算，并以频率估计概率．

（Ⅰ）试估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率；

（Ⅱ）设 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 X 元，求 X 的分布列和数学期望；

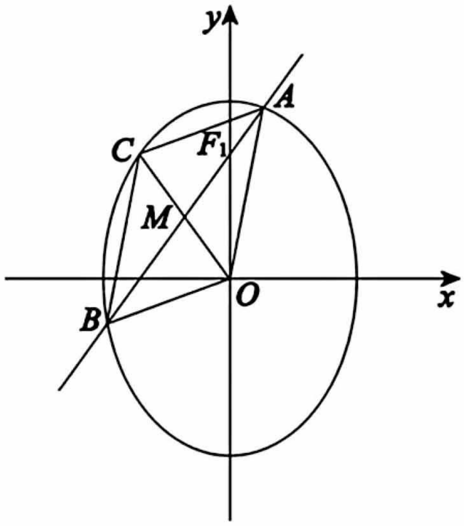
（Ⅲ）H 地区农科所研究发现，若每亩多投入 125 元的成本进行某项技术改良，则可使每亩冬小麦产量平均增加 50 kg．从广大种植户的平均收益角度分析，你是否建议农科所推广该项技术改良？并说明理由．

19. （本小题满分 15 分）

如图，已知椭圆 $E:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $F_1(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 F_1 作斜率为 k 的直线交椭圆 E 于两点 A,B，AB 的中点为 M．设 O 为原点，射线 OM 交椭圆 E 于点 C．当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABO$ 的面积相等时，求 k 的值.



20. （本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}e^x\sin x$（$0<x<\pi$），　$g(x)=(x-1)\ln x+m$（$m\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：1 是 $g(x)$ 的唯一极小值点；

（Ⅲ）若存在 a，$b\in(0,\pi)$，满足 $f(a)=g(b)$，求 m 的取值范围.（只需写出结论）

21. （本小题满分 15 分）

若数列 A：a_1，a_2，…，a_n（$n\geq 3$）中 $a_i\in\mathbf{N}^*$（$1\leq i\leq n$）且对任意的 $2\leq k\leq n-1$ $a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k$ 恒成立，则称数列 A 为“$U-$数列”.

（Ⅰ）若数列 1，x，y，7 为“$U-$数列”，写出所有可能的 x，y；

（Ⅱ）若“$U-$数列” A：a_1，a_2，…，a_n 中，$a_1=1$，$a_n=2017$，求 n 的最大值；

（Ⅲ）设 n_0 为给定的偶数，对所有可能的“$U-$数列” A：a_1，a_2，…，a_{n_0}，记 $M=\max\{a_1,a_2,...,a_{n_0}\}$，其中 $\max\{x_1,x_2,...,x_s\}$ 表示 x_1，x_2，…，x_s 这 s 个数中最大的数，求 M 的最小值.