

# 数学

(清华附中初 22 级) 2024.08

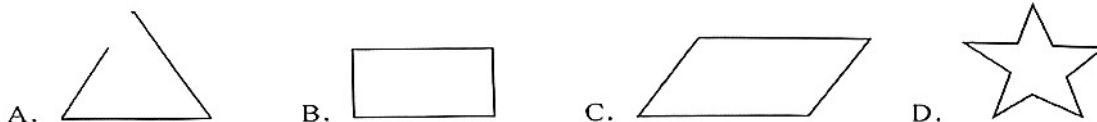
年级\_\_\_\_\_班\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_考号\_\_\_\_\_



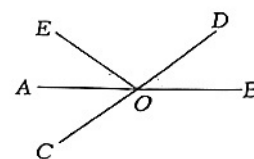
## 一. 选择题 (本题共 24 分, 每小题 3 分)

第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )

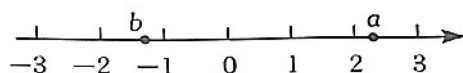


2. 如图, 直线  $AB, CD$  相交于  $O$ , 若  $\angle EOD = 120^\circ$ ,  $OA$  平分  $\angle EOC$ , 则  $\angle BOD$  度数是 ( )



A.  $30^\circ$       B.  $35^\circ$       C.  $40^\circ$       D.  $45^\circ$

3. 实数  $a, b$  在数轴上的对应点的位置如图所示, 下列结论中正确的是 ( )

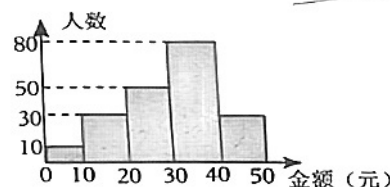


A.  $|a| > |b|$       B.  $ab > 0$       C.  $b < -a$       D.  $-\frac{b}{2a} < 0$

4. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2x + m = 0$  有两个相等的实数根, 则实数  $m$  的值为 ( )

A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

5. 学校组织学生进行义卖活动, 从中抽取部分学生义卖所得金额制成分布直方图, 如图所示, 那么金额在 20~30 元的人数占的百分比是 ( )



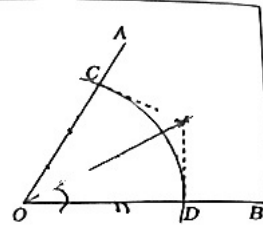
A. 15%      B. 25%      C. 40%      D. 50%

6. 某健康成年人心脏每分钟约跳 70 次, 每分钟流过的血液量约为  $5 \times 10^3 \text{ml}$ , 则该成年人心脏 5 分钟流过的血液量用科学记数法表示约为 ( )

A.  $25 \times 10^4 \text{ml}$       B.  $2.5 \times 10^3 \text{ml}$       C.  $2.5 \times 10^4 \text{ml}$       D.  $0.25 \times 10^5 \text{ml}$

7. 下面是“作 $\angle AOB$ 的角平分线”的尺规作图方法

- (1) 以点 $O$ 为圆心, 任意长为半径作弧, 分别交射线 $OA$ 、 $OB$ 于点 $C$ 、 $D$ ;
- (2) 分别以点 $C$ 、 $D$ 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 $M$ ;
- (3) 作射线 $OM$ .  $OM$ 就是 $\angle AOB$ 的平分线.



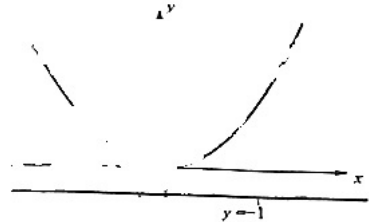
上述方法通过判定 $\triangle OMC \cong \triangle OMD$ 得到 $\angle COM = \angle DOM$ , 其中判定 $\triangle OMC \cong \triangle OMD$ 的依据是 ( )

- A. 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等
- B. 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等
- C. 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等
- D. 三边分别相等的两个三角形全等



8. 如图, 二次函数的图象经过原点和点 $(-2, 1)$ , 有下面四个结论:

- ① 该二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{4}x^2$ ;
- ② 直线 $y = 1$ 与抛物线有两个交点, 两个交点之间的距离为4;
- ③ 过点 $(0, 4)$ 作垂直于 $y$ 轴的直线, 与抛物线交于两点 $A$ 、 $B$ , 则 $OA \perp OB$ ;
- ④ 抛物线上任意一点到点 $(0, 1)$ 的距离等于到直线 $y = -1$ 的距离.



其中所有正确结论的序号是:

- A. ①③      B. ①②③      C. ①②④      D. ①②③④

二. 填空题 (本题共 24 分, 每小题 3 分)

9. 若 $\sqrt{x+3}$ 在实数范围内有意义, 则实数 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

10. 分解因式:  $2y^3 - 18y =$ \_\_\_\_\_

11. 方程 $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x} = 0$ 的解为\_\_\_\_\_.

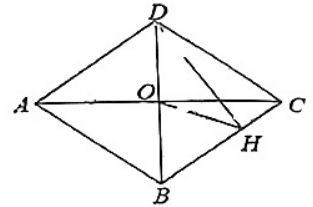
12. 一个正比例函数的图象经过点 $A(-2, 3)$ ,  $B(a, -3)$ , 则 $a =$ \_\_\_\_\_.

13. 某商场为了解顾客对某一款式围巾的不同花色的需求情况，调查了某段时间内销售该款式的 30 条围巾的花色，数据如下：

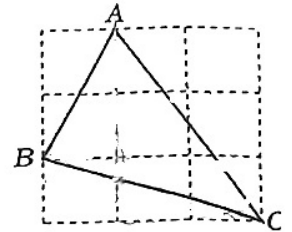
花色	A	B	C	D	E	F	G	H
销售量/条	2	2	4	5	3	9	1	4

若商场准备再购进 200 条同款式围巾，估计购进花色最多的围巾数量为 \_\_\_\_\_ 条。

14. 如图，菱形  $ABCD$  的对角线  $AC, BD$  相交于点  $O$ ，过点  $D$  作  $DH \perp BC$  于点  $H$ ，连接  $OH$ ，若  $OA=8, OH=6$ ，则菱形  $ABCD$  的面积为 \_\_\_\_\_。



15. 如图，每个小正方形边长都为 1，顺次连接小正方形的三个顶点  $A, B, C$ ，则  $\triangle ABC$  中， $BC$  边上的高的长为 \_\_\_\_\_。



16. 综合实践课上，老师带领学生制作甲、乙两个航天器模型，已知每个模型制作完成共需打磨、组装、上色三道工序，制作要求如下：

- ①两个航天器模型分别按照打磨、组装、上色的顺序依次由 A, B, C 三名学生完成；
- ②同一个学生不能同时给两个模型进行相同的工序；
- ③两个航天器模型每道工序所需时间如下表所示：

		工序		
		打磨 (A)	组装 (B)	上色 (C)
模型	时间			
	模型甲	11 分钟	9 分钟	10 分钟
模型乙		7 分钟	12 分钟	9 分钟

在不考虑其它因素的前提下，

- (1) 若只完成模型甲的制作，需要时间 \_\_\_\_\_ 分钟；
- (2) 若这两个模型都制作完成，所需的最短时间为 \_\_\_\_\_ 分钟。

三. 解答题 (本题共 72 分, 其中 17、18、19、21、22、23 题每小题 5 分, 20、26 题每小  
 题 6 分, 25、26 题每小题 7 分, 27、28 题每小题 8 分)

17. 计算:  $(1-\sqrt{3})^0 + |-\sqrt{2}| - \sqrt{8} + \frac{1}{4}$

18. 解不等式组: 
$$\begin{cases} 3(x-1) < 4+2x \\ \frac{x-9}{5} < 2x \end{cases}$$

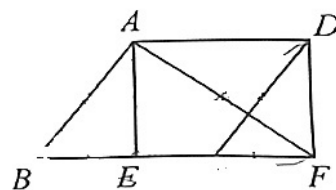


19. 已知  $a^2+3a-2=0$ , 求代数式  $(\frac{3}{a^2-9} + \frac{1}{a+3}) \cdot \frac{a-3}{a^2}$  的值.

20. 如图, 在  $\square ABCD$  中,  $AE \perp BC$  于点  $E$ , 延长  $BC$  至  $F$  点使  $CF=BE$ , 连接  $AF, DF$ .

(1) 求证: 四边形  $AEFD$  是矩形;

(2) 若  $AB=6, DE=8, BF=10$ , 求  $AE$  的长.



21. 快递员把货物送到客户手中称为送件, 帮客户寄出货物称为揽件, 快递员的提成取决于送件数和揽件数. 某快递公司快递员小李若平均每天的送件数和揽件数分别为 80 件和 20 件, 则他平均每天的提成是 160 元; 若平均每天的送件数和揽件数分别为 120 件和 25 件, 则他平均每天的提成是 230 元, 求快递员小李平均每送一件和平均每揽一件的提成各是多少元.

22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-1,0)$ ,  $(1,2)$ .

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 当  $x > -3$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y=mx-1$  ( $m \neq 0$ ) 的值都小于函数  $y=kx+b$  的值, 直接写出  $m$  的取值范围.

23. 某校要派两个代表队去参加区健美操大赛, 每个队有 8 名同学, 现统计了她们的身高 (单位: cm), 数据整理如下:

a. 甲队 163 166 167 169 169 171 172 174

乙队 163 165 166 169 171 171 173 178

b. 每队 8 名选手身高的平均数、中位数、众数如下:

班级	平均数	中位数	众数
甲队	168.875	169	169
乙队	169.5	$m$	$n$

根据以上信息, 回答下列问题:

(1) 写出表中  $m$ ,  $n$  的值;

(2) 如果某队选手的身高的方差越小, 则认为该队选手的身高比较整齐. 据此推断, 在甲队和乙队的选手中, 身高比较整齐的是 \_\_\_\_\_ 队 (填“甲”或“乙”);

(3) 甲队的 6 位首发选手的身高分别为 166, 167, 169, 169, 171, 172. 如果乙队已经选出 5 位首发选手, 身高分别为 166, 169, 171, 171, 173, 要使得乙队 6 位首发选手的平均身高不低于甲队 6 位首发选手的平均身高, 且方差尽可能小, 则第六位选手的身高是 \_\_\_\_\_ cm.

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若抛物线  $y=x^2+bx+c$  顶点  $A$  的横坐标是  $-1$ , 且与  $y$  轴交于点  $B(0,-1)$ , 点  $P$  为抛物线上一点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 若将抛物线  $y=x^2+bx+c$  向下平移 4 个单位, 点  $P$  平移后的对应点为  $Q$ . 如果  $OP=OQ$ , 结合函数图象, 求点  $Q$  的坐标.





25. 依据《国家纺织产品基本安全技术规范》规定，服装标签上标示着 A、B、C 三个类别。

A 类：婴幼儿用品，是指年龄在 36 个月以内的婴幼儿使用的纺织产品，同时也包括指 100cm 身高以下的儿童。包括了婴幼儿使用的相关服装产品等，其代表着服装最高的安全级别。其甲醛含量必须低于 20mg/kg。

B 类：直接接触皮肤的产品，是正常人的衣服标准，也就是适中的安全级别，同时也是指将会与身体直接接触的服装，包括大部面积与人体接触的衣服等。其甲醛含量高于 20mg/kg，但必须低于 75mg/kg。

C 类：非直接接触皮肤的产品，是安全级别最低的纺织产品，是指将不会与人的皮肤有直接的接触，或者是仅仅只有很小面积的接触，这类衣服的安全级别是最低的，包括了外套、窗帘、裙子等。其甲醛含量高于 75mg/kg，但必须低于 300mg/kg。

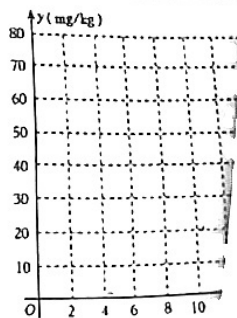
为了去除衣物上的甲醛（记作“P”），某小组研究了衣物上 P 的含量（单位：mg/kg）与浸泡时长（单位：h）的关系。该小组选取甲、乙两类服装样品，将样品分成多份，进行浸泡处理，检测处理后样品中 P 的含量。所得数据如下：

浸泡时长 (h)	甲类衣物中 P 的含量 (mg/kg)	乙类衣物中 P 的含量 (mg/kg)
0	79	80
2	32	37
4	25	31
6	21	29
8	18	28
10	17	27
12	16	27

(1) 设浸泡时间为  $x$ ，甲、乙两类衣物中 P 的含量分别为  $y_1$ ， $y_2$ ，在平面直角坐标系  $xOy$  中，描出表中各组数值所对应的点  $(x, y_1)$ ， $(x, y_2)$ ，并画出  $y_1$ ， $y_2$  的图象；

(2) 结合实验数据，利用所画的函数图象可以推断，当浸泡时长为 5h 时，甲、乙两类衣物中 P 的含量的差约为 \_\_\_\_\_ mg/kg（精确到个位）；

(3) 若浸泡时长不超过 12h，则经过浸泡处理后可能达到 A 类标准的衣物为 \_\_\_\_\_ “甲”或“乙”，该类衣物达到 A 类标准至少需要浸泡 \_\_\_\_\_ h（精确到个位）。



26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A(m, a), B(m-2, a)$  在抛物线  $y = x^2 - 2tx - 3$  上.

- (1) 求抛物线与  $y$  轴的交点坐标以及  $t$  与  $m$  满足的等量关系;  
 (2) 若点  $C(4, b)$  在该抛物线上且  $a < b < -3$ , 求  $m$  的取值范围.



27. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  中点. 将线段  $AB$  绕点  $A$  顺时针旋转  $\alpha$  得到  $AE$ , 将线段  $AC$  绕点  $A$  逆时针旋转  $\beta$  得到  $AF$ , 且  $\alpha + \beta = 180^\circ - 2\angle BAC$ , 连接  $EF$ .

- (1) 按题意补全图形, 求证:  $EF = 2AD$ .  
 (2) 若  $\angle ABC = 60^\circ$ , 设  $EF$  与  $AB$  交于点  $M$ , 且点  $M$  为线段  $EF$  的中点, 连接  $BE, CF$ .  
 ① 直接写出  $\angle ABE$  的度数 \_\_\_\_\_;  
 ② 延长  $EB, FC$  交于点  $N$ , 用等式表示线段  $BN$  与  $BC$  的数量关系, 并证明.

