北京一零一中 2025 届高三数学统考一

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

一、选择题共 10 小题。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{R}\mid x^2<10\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$ (　　)

(A) $\{2\}$　　(B) $\{2,3\}$　　(C) $\{3,4\}$　　(D) $\{2,3,4\}$

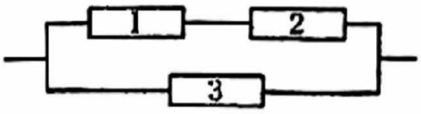
2. 若 $a+b<0$, 且 $b>0$, 则 (　　)

(A) $ab<a^2<b^2$　　(B) $a^2<b^2<-ab$　　(C) $b^2<-ab<a^2$　　(D) $a^2<-ab<b^2$

3. 在平面直角坐标系中, 动点 M 在单位圆上按逆时针方向作匀速圆周运动, 每 12 分钟转动一周. 若点 M 的初始位置坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, 则运动到 3 分钟时, 动点 M 所处位置的坐标是 (　　)

(A) $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　(B) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　(C) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　(D) $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$

4. 如图所示, 1, 2, 3 表示三个开关, 若在某段时间内它们每个正常工作的概率都是 0.9, 那么此系统的可靠性是 (　　)



(A) 0.999　　(B) 0.981　　(C) 0.980　　(D) 0.729

5. 若函数 $y=\sqrt{a-a^x}$ $(a>0, a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[0,1]$, 则 $\log_a\frac{5}{6}+\log_a\frac{48}{5}$ 的值为 (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6. 两个正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x}+2y=1$, 若至少存在一组 x, y 使得 $x+\frac{2}{y}\leqslant -m^2-6m$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 (　　)

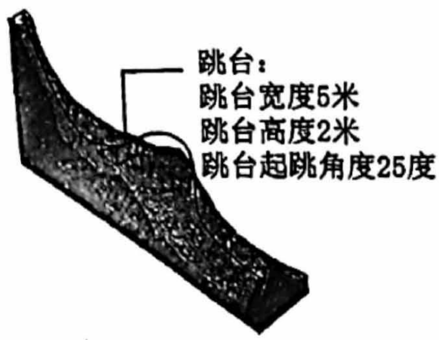
(A) $\{-3\}$　　(B) $\{m\mid -4<m<-2\}$

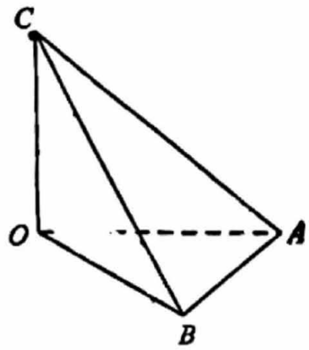
(C) $\{m\mid -4\leqslant m\leqslant -2\}$　　(D) $\varnothing$

7. 设 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期为 2 的函数, 且是偶函数, 已知当 $x\in[2,3]$ 时, $f(x)=x$, 则当 $x\in[-2,0]$ 时, $f(x)$ 的解析式是 (　　)

(A) $f(x)=x+4$　　(B) $f(x)=2-x$　　(C) $f(x)=3-|x+1|$　　(D) $f(x)=2+|x+1|$

8. 2022 年北京冬奥会拉开帷幕，动作观赏性强、视觉冲击力大的自由式滑雪大跳台是目前“冬奥大家族”中最年轻的项目. 首钢滑雪大跳台实现了竞赛场馆与工业遗产再利用城市更新的完整结合，见证了中外运动员在大跳台“冲天一跳”的精彩表现和北京这座世界上独一无二“双奥之城”的无上荣光. 如图为大跳台示意图，为测量大跳台最高处 C 点的高度，小王在场馆内的 A, B 两点测得 C 的仰角分别为 $45°, 30°$, $AB = 60$ m, 且 $\angle AOB = 30°$, 则大跳台最高高度 $OC =$ (　　)





(A) 45 m　　(B) $45\sqrt{2}$ m　　(C) 60 m　　(D) $60\sqrt{3}$ m

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 则“$x_1+x_2>0$”是“$f(x_1)+f(x_2)>0$”的 (　　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $M=\{\alpha \mid f(\alpha)=0\}$, $N=\{\beta \mid g(\beta)=0\}$, 若存在 $\alpha \in M, \beta \in N$, 使 $|\alpha-\beta|<n$, 则称函数 $f(x), g(x)$ 互为“n 度零点函数”, 若 $f(x)=3^{2-x}-1$, $g(x)=x^2-ae^x$ 互为“1 度零点函数”, 则实数 a 的取值范围为 (　　)

(A) $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e}]$　　(B) $(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}]$　　(C) $[\frac{4}{e^2}, \frac{2}{e})$　　(D) $[\frac{4}{e^3}, \frac{2}{e^2})$

二、填空题共 5 小题。

11. 已知复数 $z=\frac{1+i}{i}$, 则 $z \cdot \bar{z}=$ ________.

12. 已知二项式 $(2x-a)^n$ 的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大，且展开式中 x^3 项的系数为 20, 则实数 a 的值为 ________.

13. 设 D 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$, 则 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积比为 ________.

14. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 能说明"若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n < S_{n+1}$"为假命题的一组 a_1 和公比 q 的值为 $a_1 =$ ________, $q =$ ________.

15. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{na_{n+1}^2}{na_{n+1}+1}$, 给出下列四个结论:

① $a_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;　　② $\{a_n\}$ 是递增数列;

③ $a_{n+1} - a_n > \dfrac{1}{n+1}$;　　④ $a_{n+1} < 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

其中所有正确结论的序号是 ________

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 = 3$, $a_4 = 12$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 4$, $b_4 = 20$, 且 $\{b_n - a_n\}$ 是等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

17. 已知函数 $f(x) = \sin 2x \cos\varphi - \cos 2x \sin\varphi$, 其中 $|\varphi| < \dfrac{\pi}{2}$. 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知条件, 使 $f(x)$ 存在, 并完成下列两个问题.

(1) 求 φ 的值;

(2) 若 $m > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上最小值为 $-\dfrac{1}{2}$, 求实数 m 的取值范围.

条件①: 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \leqslant f(\dfrac{\pi}{3})$ 成立;

条件②: $f(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{1}{2}$;

条件③: $f(\dfrac{\pi}{3}) - f(-\dfrac{\pi}{6}) = 2$.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{3}\sin A + \cos A = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$, $a = 2$, $b^2 > a^2 + c^2$. 求:

(1) $\tan 2A$ 的值;

(2) c 和 $\triangle ABC$ 面积 S 的值.

19. 某科目进行考试时, 从计算机题库中随机生成一份难度相当的试卷. 规定每位同学有三次考试机会, 一旦某次考试通过, 该科目成绩合格, 无需再次参加考试, 否则就继续参加考试, 直到用完三次机会. 现从 2022 年和 2023 年这两年的第一次、第二次、第三次参加考试的考生中, 分别随机抽取 100 位考生, 获得数据如下表:

	2022 年		2023 年	
	通过	未通过	通过	未通过
第一次	60 人	40 人	50 人	50 人
第二次	70 人	30 人	60 人	40 人
第三次	80 人	20 人	m 人	$(100-m)$ 人

假设每次考试是否通过相互独立.

(1) 从 2022 年和 2023 年第一次参加考试的考生中各随机抽取一位考生, 估计这两位考生都通过考试的概率;

(2) 小明在 2022 年参加考试, 估计他不超过两次考试该科目成绩合格的概率;

(3) 若 2023 年考生成绩合格的概率不低于 2022 年考生成绩合格的概率, 则 m 的最小值为下列数值中的哪一个? (直接写出结果)

m 值	83	88	93

20. 设函数 $f(x)=e^x+a\cos x$, $a\in\mathbf{R}$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+2$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求证: 方程 $f(x)=2$ 仅有一个实根;

(3) 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 有 $f(x)>k\sin x+2$, 求正数 k 的取值范围.

21. 定义 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_n)=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$ 为有限项数列 $\{a_n\}$ 的波动强度.

(1) 当 $a_n=(-1)^n$ 时, 求 $\tau(a_1,a_2,\cdots,a_{100})$ 的值;

(2) 若数列 a,b,c,d 满足 $(a-b)(b-c)>0$, 求证: $\tau(a,b,c,d)\leqslant\tau(a,c,b,d)$;

(3) 设 $\{a_n\}$ 各项均不相等, 且交换数列 $\{a_n\}$ 中任何相邻两项的位置, 都会使数列的波动强度增加, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 一定是递增数列或递减数列.