

2024 北京一零一中高二（上）开学考

数 学

友情提示：

本试卷分为 I 卷、II 卷两部分，共 19 个小题，共 4 页，满分 120 分；答题时间为 90 分钟；请将答案写在答题纸上。

I 卷：选择题（共 40 分）

1. $\cos 30^\circ \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \sin 15^\circ$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

2. 已知向量 $\vec{a} = (m, 1)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $-\frac{9}{4}$

3. 在复平面内，复数 $z = i \cdot (2 - i)$ 对应的点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

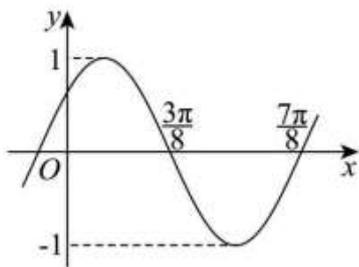
4. 在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a = 2$, $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{6}$, 则 $b =$

()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

5. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 且此函数的图象如图所示, 则 ω, φ 的值分别是

()



- A. $2, \frac{\pi}{2}$ B. $2, \frac{\pi}{4}$ C. $4, \frac{\pi}{2}$ D. $4, \frac{\pi}{4}$

6. 把函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，再把图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ ，纵坐标不变，则所得函数图象的解析式为 ()

- A. $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{9}\right)$ C. $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ D. $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{9}\right)$



7. 已知 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} 是三个非零平面向量, 则下列叙述正确的是 ()

- A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \pm\vec{b}$ B. 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$
 C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$ D. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$

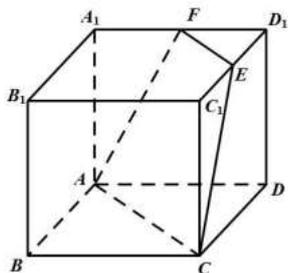
8. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (x, -2)$, 则 “ $x < 2$ ” 是 “ \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为钝角” 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 已知 α , β 是空间中两个不同的平面, m , n 是空间中两条不同的直线, 则下列命题中错误的是 ()

- A. 若 $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta$, 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$
 B. 若 $m \perp \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $\alpha \cap \beta = l$, $m \parallel \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $m \parallel l$
 D. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

10. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E , F 分别是棱 C_1D_1 , A_1D_1 上的动点. 给出下面四个命题:



- ①若直线 AF 与直线 CE 共面, 则直线 AF 与直线 CE 相交;
 ②若直线 AF 与直线 CE 相交, 则交点一定在直线 DD_1 上;
 ③若直线 AF 与直线 CE 相交, 则直线 DD_1 与平面 ACE 所成角的正切值最大为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 ④直线 AF 与直线 CE 所成角的最大值是 $\frac{\pi}{3}$.

其中, 所有正确命题的序号是 ()

- A. ①④ B. ②④ C. ①②④ D. ②③④

II 卷 非选择题 (共 80 分)

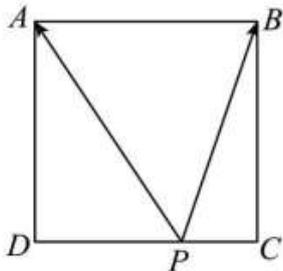
11. 若复数 $z = (a-1) + i$ 为纯虚数, 则实数 $a =$ _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a \sin B = kb$, 则 k 的一个取值为 _____; 当 $A = \frac{\pi}{2}$ 时, $k =$ _____.

13. 已知 α 为第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-3, 1)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

15. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, P 为 CD 边上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 _____.



16. 设函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

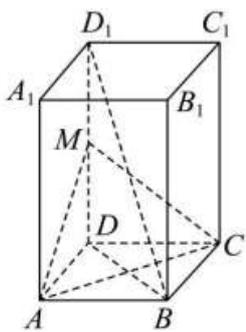
(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{1}{7}$, $c = 8$, $\cos B = \frac{11}{14}$, 求:

(1) b 的值;

(2) 角 A 的大小和 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, M 是 DD_1 的中点.



(1) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 AMC ;

(2) 证明: $AC \perp BD_1$;

(3) 求点 D 到平面 MAC 的距离.

19. 如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D, E 分别为 AC, AB 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置 (A_1 与 C 不重合), 连 A_1C, A_1B , 如图 2.



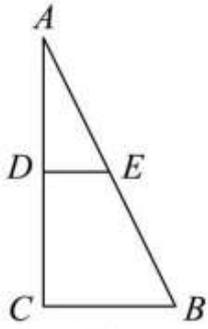


图1

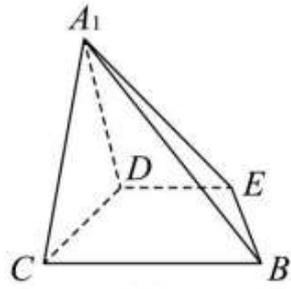


图2



- (1) 求证：平面 $A_1DE \perp$ 平面 A_1CD ；
- (2) 若平面 A_1DE 与平面 A_1CB 交于过 A_1 的直线 m ，求证 $DE \parallel m$ ；
- (3) 线段 A_1B 上是否存在点 Q ，使得 $A_1C \perp$ 平面 DEQ ，若存在，指出 Q 点位置并证明；若不存在，说明理由。