2023-2024 学年度第一学期期中练习题

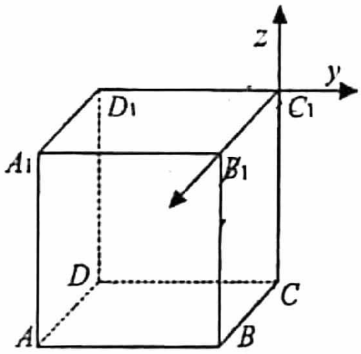
年级：高二　科目：数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 在如图所示的空间直角坐标系中，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体，其中顶点 A 的坐标是(　)

A. $(-1,-1,-1)$　　B. $(-1,1,-1)$　　C. $(1,-1,1)$　　D. $(1,-1,-1)$



2. 已知两个向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(4,m,n)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $m+n$ 的值为(　)

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

3. 已知 O 为空间任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$，若 A，B，C，P 四点共面，则 $t=$ (　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 已知圆 C 经过两点 $A(0,2)$，$B(4,6)$，且圆心 C 在直线 $l:2x-y-3=0$ 上，则圆 C 的方程为(　)

A. $x^2+y^2-6x-6y-16=0$　　B. $x^2+y^2-2x+2y-8=0$

C. $x^2+y^2-6x-6y+8=0$　　D. $x^2+y^2-2x+2y-56=0$

5. 两圆 $x^2+y^2-6x+16y-48=0$ 与 $x^2+y^2+4x-8y-44=0$ 的公切线条数为( )

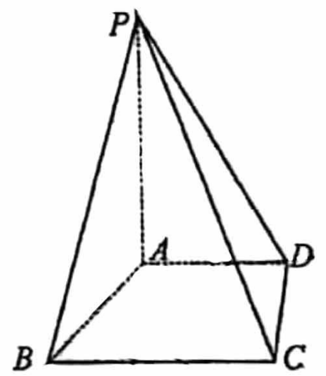
A. 1条　　B. 2条　　C. 3条　　D. 4条

6. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的虚轴长为2，焦距为 $2\sqrt{3}$，则双曲线的渐近线方程为( )

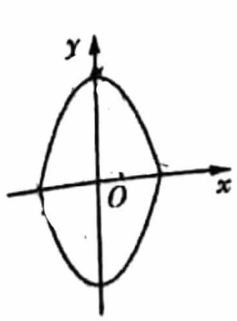
A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm 2x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{1}{2}x$

7. 如图，在底面是直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC/\!/AD$，$\angle BAD=90^\circ$，$PA=AB=BC=2$，$AD=1$，则点 D 到平面 PBC 的距离为( )

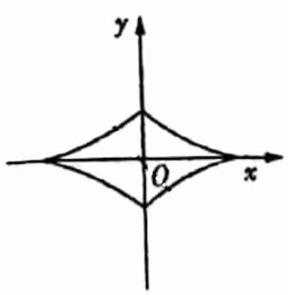
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4



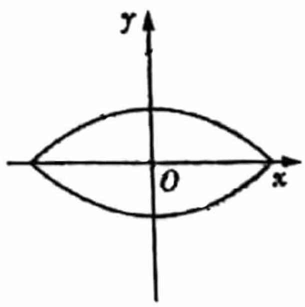
8. 方程 $|x|+\sqrt{|y|}=2$ 所表示曲线的大致形状为( )



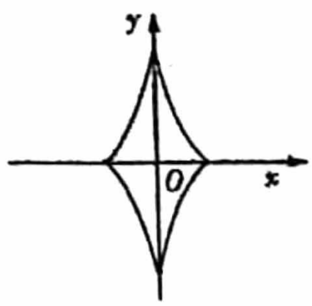
A.



B.



C.



D.

9. 过点 $P(0,2)$ 作直线 $x+my-4=0$ 的垂线，垂足为 Q，则 Q 到直线 $x+2y-14=0$ 的距离最小值为(　)

A. $2\sqrt{5}$　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　C. 0　　　　D. 2

10. 已知抛物线 $C:x^2=8y$ 的焦点为 F，C 的准线与对称轴交于 D，过 D 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BD}$，若 FB 为 $\angle DFA$ 的平分线，则 $|AF|+|BF|$ 等于(　)

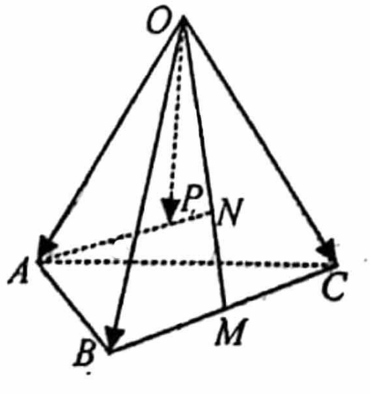
A. $\frac{8}{3}$　　　　B. 8　　　　C. 10　　　　D. $\frac{32}{3}$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=2$，$AA_1=3$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\theta$，若 $AC_1=5$，则 $\cos\theta=$__________.

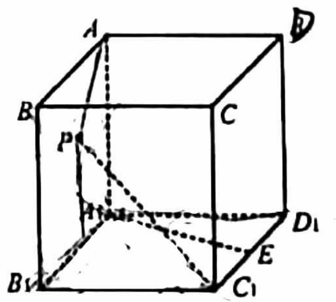
12. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，P 为椭圆上一点，若 $|PF_1|=5$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$__________.

13. 如图，M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点，点 N 在线段 OM 上，点 P 在线段 AN 上，且 $MN=\frac{1}{2}ON$，$AP=\frac{3}{4}AN$，用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$，则 $\overrightarrow{OP}=$__________.



14. 已知点$A(3,-1)$，$B(5,-2)$，点P在直线$x+y=0$上，若使$PA+PB$取最小值，则点P坐标是________.

15. 如图，棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的侧面ABB_1A_1(含边界)内有一动点P，则下列结论中正确的是________.



①若$\overrightarrow{B_1P}=m\overrightarrow{B_1B}+n\overrightarrow{B_1A_1}$，$m+n=1$，则$\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=0$；

②若$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B}\ (0<\lambda<1)$，则$\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{B_1D}=0$；

③若$\overrightarrow{B_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1D_1}\right)$，则$\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{A_1E}=-\frac{2}{3}$；

④若$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1D_1}\right)$，则存在非零向量$\overrightarrow{B_1P}$使$\overrightarrow{B_1P}\cdot\overrightarrow{A_1E}=-1$.

三、解答题（共6题，满分85分）

16. (13分) 已知ΔABC顶点$A(3,0)$，$B(-1,-3)$，$C(1,1)$，边AB上的高为CE，且垂足为E.

(Ⅰ)求边BC上中线AD所在的直线方程；

(Ⅱ)求点E的坐标.

17. (13分) 已知直线$l:4x+3y+10=0$，半径为2的圆C与l相切，圆心C在x轴上且在直线l的上方.

(Ⅰ)求圆C的方程；

(Ⅱ) 设过点 $P(1,1)$ 的直线 l_1 被圆 C 截得的弦长等于 $2\sqrt{3}$，求直线 l_1 的方程；

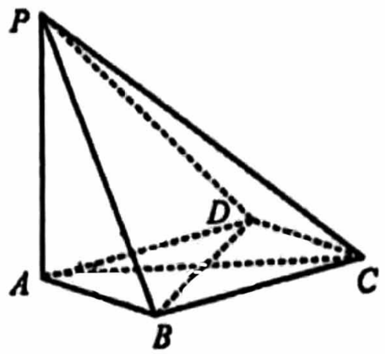
(Ⅲ) 过点 $M(1,0)$ 的直线与圆 C 交于 A，B 两点(A 在 x 轴上方)，问在 x 轴正半轴上是否存在点 N，使得 x 轴平分 $\angle ANB$？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

18. (14 分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$．

(Ⅰ) 求证：$BD\perp$ 平面 PAC；

(Ⅱ) 若 $PA=AB$，求 PB 与 AC 所成角的余弦值；

(Ⅲ) 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时，求 PA 的长．



19. (15 分) 已知点 $A(\sqrt{2},1)$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的一点．

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ) 点 P 在椭圆上，点 A 关于坐标原点的对称点为 B，直线 AP 和 BP 的斜率都存在且不为 0，试问直线 AP 和 BP 的斜率之积是否为定值？若是，求此定值；若不是，请说明理由．

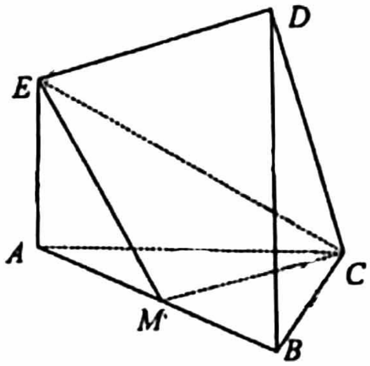
20. (15 分) 在如图所示的多面体中，$EA\perp$平面ABC，$DB\perp$平面ABC，

$AC\perp BC$，且$AC=BC=BD=2AE=2$，M是AB的中点.

(Ⅰ) 求证：$CM\perp EM$；

(Ⅱ) 求平面EMC与平面BCD所成的锐二面角的余弦值；

(Ⅲ) 在棱DC上是否存在一点N，使得直线MN与平面EMC所成的角为60°，若存在，指出点N的位置；若不存在，请说明理由.



21. (15 分) 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F\left(1,0\right)$，$M$点的坐标为$\left(0,b\right)$，$O$为坐标原点，$\Delta OMF$是等腰直角三角形.

(Ⅰ) 求椭圆C的方程；

(Ⅱ) 经过点$N\left(0,2\right)$作直线AB交椭圆C于A，B两点，求ΔAOB面积的最大值；

(Ⅲ) 是否存在直线l交椭圆于P，Q两点，使点F为ΔPMQ的垂心？若存在，求出直线l的方程；若不存在，请说明理由.