2023 北京八十中高二（上）期中

数　　学

2023 年 11 月

考号____　　班级____　　姓名

（考试时间　120 分钟　　满分　150 分

提示：

试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.

在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答.

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 直线 $x+y-1=0$ 的倾斜角是（　）

A.45°　　B. 135°　　C. 120°　　D. 90°

2. 已知 $\vec{a}=\left(2,-1,3\right)$，$\vec{b}=\left(-4,2,x\right)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$（　）

A. $\dfrac{10}{3}$　　B. -6　　C. 6　　D. 1

3. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$ 上一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 7，则 P 到另一个焦点的距离为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 已知点 $A\left(1,2\right)$，$B\left(3,1\right)$，则线段 AB 的垂直平分线方程为（　）

A. $4x+2y-5=0$　　B. $4x-2y-5=0$　　C. $x+2y-5=0$　　D. $x-2y-5=0$

5. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $O\left(0,0\right)$ 对称的圆的方程为（　）

A. $(x+2)^2+y^2=5$　　B. $x^2+(y-2)^2=5$

C. $(x-2)^2+y^2=5$　　D. $x^2+(y+2)^2=5$

6. “$a=1$”是“直线 $ax+\left(a-1\right)y-1=0$ 与直线 $\left(a-1\right)x+ay+1=0$ 垂直”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

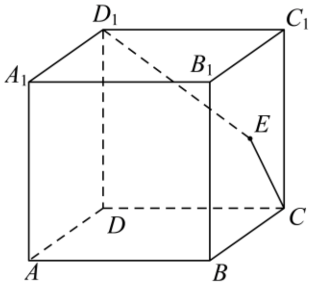
7. 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为直线 $x=\dfrac{3}{2}a$ 上一点，$\triangle F_2PF_1$ 是底角为 $30°$ 的等腰三角形，则椭圆 C 的离心率为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

8. 已知 M 是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的动点，则 M 到直线 $y=kx+1(k\in\mathbf{R})$ 距离的最大值为（　）

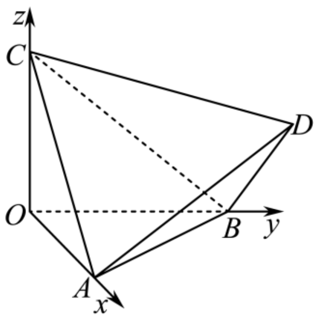
A. 2　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. 3　　D. $2\sqrt{2}+1$

9. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是侧面 BB_1C_1C 内的一个动点，若点 E 满足 $\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，则点 E 的轨迹为（　）



A. 圆　　B. 半圆　　C. 直线　　D. 线段

10. 如图，正四面体 ABCD 的顶点 A，B，C 分别在两两垂直的三条射线 Ox，Oy，Oz 上，则在下列命题中，错误的是



A. $O-ABC$ 是正三棱锥

B. 直线 OB // 平面 ACD

C. 直线 AD 与 OB 所成的角是 45°

D. 二面角 $D-OB-A$ 为 45° .

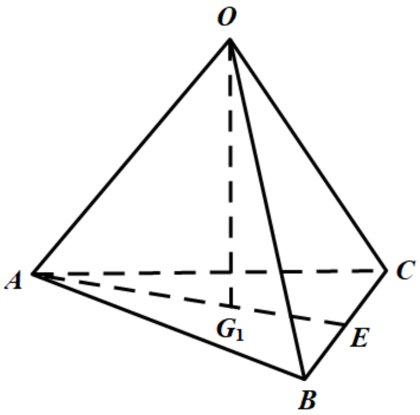
二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 直线 $y=2x$ 与直线 $y=2x+1$ 之间的距离等于__________.

12. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的渐近线方程为__________.

13. 已知平面 α 经过原点 O，且法向量为 $\vec{n}=(2,1,2)$，点 $P(1,2,3)$，则点 P 到平面 α 的距离为______.

14. 如图，在四面体 $O-ABC$ 中，G_1 是 $\triangle ABC$ 的重心，G 是 OG_1 上的一点，且 $OG=3GG_1$，若 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 $x+y+z=$___________；若四面体 $O-ABC$ 是棱长为 2 的正四面体，则 $|OG|=$___________.



15. 关于曲线$C:x^2+y^2=|x|+|y|$，给出下列四个结论：

①曲线C关于原点对称，也关于x轴、y轴对称；

②曲线C围成的面积是$\pi+2$；

③曲线C上任意一点到原点的距离者不大于$\sqrt{2}$；

④曲线C上的点到原点的距离的最小值为1.

其中，所有正确结论的序号是______.

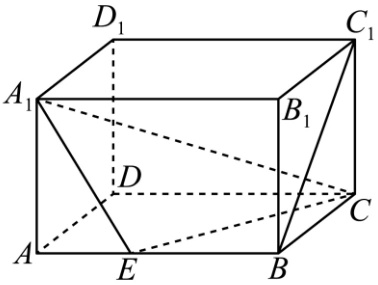
三、解答题（本题共5小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

16. 已知圆C经过坐标原点O和点$(2,2)$，且圆心在x轴上．

（1）求圆C的方程．

（2）设直线l经过点$(1,2)$，且l与圆C相交所得弦长为$2\sqrt{3}$，求直线l的方程．

17. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$AD=AA_1=2$，点E在AB上，且$AE=1$.



（1）求直线BC_1与A_1C所成角的大小；

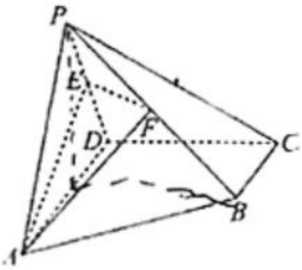
（2）求BC_1与平面A_1EC所成角的正弦值.

18. 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的长轴长为4，且离心率为$\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设过点$F(1,0)$且斜率为k的直线l与椭圆C交于A，B两点，线段AB的垂直平分线交x轴于点D.求证：$\dfrac{|AB|}{|DF|}$为定值.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$CD\perp$ 平面 PAD，$\triangle PAD$ 为等边三角形，$AD // BC$，$AD=CD=2BC=2$，E,F 分别为棱 PD,PB 的中点.

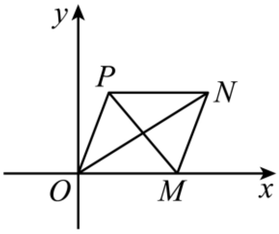


（1）求证：$AE\perp$ 平面 PCD；

（2）求平面 AEF 与平面 PAD 夹角的余弦值；

（3）在校 PC 上是否存在点 G，使得 $DG //$ 平面 AEF？说明理由.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，$M\left(\sqrt{3},0\right)$，已知平行四边形 $OMNP$ 两条对角线的长度之和等于 4.



（1）求动点 P 的轨迹方程；

（2）过 $M\left(\sqrt{3},0\right)$ 作互相垂直的两条直线 l_1、l_2，l_1 与动点 P 的轨迹交于 A、B，l_2 与动点 P 的轨迹交于点 C、D，AB、CD 的中点分别为 E、F；证明：直线 EF 恒过定点，并求出定点坐标；

（3）在（2）的条件下，求四边形 $ACBD$ 面积的最小值.

参考答案

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1.【答案】B

【分析】根据斜率即可求解倾斜角.

【详解】由 $x+y-1=0$ 得 $y=-x+1$，

故斜率为 -1, 则倾斜角为 $135°$，

故选：B

2.【答案】A

【分析】根据空间向量垂直的坐标运算即可求解.

【详解】由 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 可得 $-8-2+3x=0$，解得 $x=\dfrac{10}{3}$，

故选：A

3.【答案】A

【分析】利用椭圆的定义列式计算得解.

【详解】椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$ 的长轴长 $2a=10$，而点 P 到椭圆一个焦点的距离为 7，

所以 P 到另一个焦点的距离为 $2a-7=3$.

故选：A

4.【答案】B

【分析】应用两点式求线段 AB 的斜率，进而可得垂直平分线的斜率，结合 AB 中点坐标及点斜式写出垂直平分线方程.

【详解】由题设，$k_{AB}=\dfrac{1-2}{3-1}=-\dfrac{1}{2}$，故线段 AB 的垂直平分线的斜率为 2，又 AB 中点为 $(2,\dfrac{3}{2})$，

所以线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-\dfrac{3}{2}=2(x-2)$，整理得：$4x-2y-5=0$.

故选：B

5.【答案】C

【分析】先求出圆心关于原点的对称点，从而可求出所求圆的方程.

【详解】圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 的圆心为 $(-2,0)$，半径为 $\sqrt{5}$，

因为点 $(-2,0)$ 关于原点 $O\left(0,0\right)$ 对称点为 $(2,0)$，

所以圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $O\left(0,0\right)$ 对称的圆的方程为

$(x-2)^2+y^2=5$，

故选：C.

6.【答案】A

【分析】根据两直线垂直可构造方程求得a的值，由推出关系可得结论.

【详解】由两直线垂直可得：$a(a-1)+a(a-1)=0$，解得：$a=0$或$a=1$；

$\because a=1\Rightarrow a=0$或$a=1$，$a=0$或$a=1\not\Rightarrow a=1$，

$\therefore$“$a=1$”是“直线$ax+(a-1)y-1=0$与直线$(a-1)x+ay+1=0$垂直”的充分不必要条件.

故选：A.

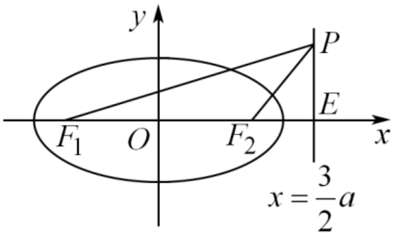
7.【答案】D

【分析】由$\triangle F_2PF_1$是底角为$30°$的等腰三角形，把$|PF_2|=|F_1F_2|$用a,c表示出来后可求得离心率.

【详解】解：由题意可得$|PF_2|=|F_1F_2|$，$F_2(c,0)$，如图，$\angle PF_1F_2=\angle F_1PF_2=30°$，则$\angle PF_2E=60°$，$\angle F_2PE=30°$，

所以$|PF_2|=2|EF_2|=2\left(\frac{3}{2}a-c\right)$，

所以$2\left(\frac{3}{2}a-c\right)=2c$，$\therefore 3a=4c$，$\therefore e=\frac{3}{4}$.



故选：D.

8.【答案】B

【分析】根据圆上的点到一条直线距离的最大值等于圆心到此直线距离与半径和，根据$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$恒过的定点$C(0,1)$，过圆心$A\ 1,0$作直线$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$的垂线，垂足为B，得知点B的轨迹为以AC为直径的圆，则$d_{\max}=|AB|_{\max}+1=\sqrt{2}+1$求解.

【详解】设圆$(x-1)^2+y^2=1$的圆心为$A\ 1,0$，点M到直线$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$的距离为d，过点A作直线$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$的垂线，垂足为B，

则点A到直线$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$的距离为$|AB|$，所以$d_{\max}=|AB|_{\max}+1$，

又因为直线$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$恒过定点$C(0,1)$，则垂足B的轨迹为以AC为直径的圆，

则$|AB|_{\max}=|AC|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，所以$d_{\max}=|AB|_{\max}+1=\sqrt{2}+1$

故选：B

9.【答案】B

【分析】设C_1D与CD_1交点为O，取CC_1中点F，连接OE,OF,EF，证明$OF\perp EF$，由$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，

则 $D_1E\perp CE$，从而可得 $OE=\frac{1}{2}CD_1$，最终得出 $EF=\frac{1}{2}a$（a 为正方体的棱长），从而得轨迹.

【详解】如图，设 C_1D 与 CD_1 交点为 O，取 CC_1 中点 F，连接 OE,OF,EF，

O 是 CD_1 中点，$OF\perp CC_1$，而平面 $CC_1D_1D\perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $CC_1D_1D\cap$ 平面 $BCC_1B_1=CC_1$，

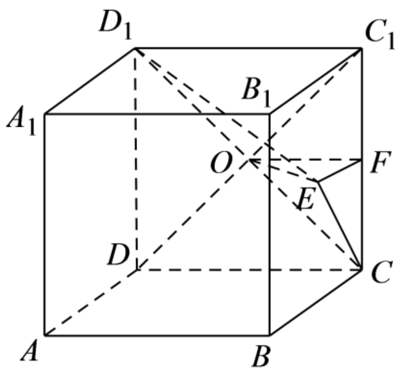
$OF\subset$ 平面 CC_1D_1D，所以 $OF\perp$ 平面 BCC_1B_1，$EF\subset$ 平面 BCC_1B_1，则 $OF\perp EF$，

$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，则 $D_1E\perp CE$，所以 $OE=\frac{1}{2}CD_1$，

设正方体棱条为 a，则 $OE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，显然 $OF=\frac{1}{2}a$，所以 $EF=\sqrt{OE^2-OF^2}=\frac{1}{2}a$，

在正方形 BCC_1B_1 内 E 点到点 F 的距离为 $\frac{1}{2}a$，其轨迹是以 F 为圆心的半圆，

故选：B.



10.【答案】B

【详解】试题分析：由正四面体的性质知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 OA、OB、OC 两两垂直，所以 A 正确；借助正方体思考，把正四面体 $ABCD$ 放入正方体，很显然直线 OB 与平面 ACD 不平行，B 错误.

考点：正四面体的性质、转化思想的运用.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11.【答案】$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【分析】利用平行线间的距离公式求解即可.

【详解】直线 $y=2x$ 与直线 $y=2x+1$ 之间的距离 $d=\frac{|0-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{5}$

12.【答案】$y=\pm x$

【分析】先把双曲线化简成标准方程，直接得出渐近线方程.

【详解】由 $x^2-y^2=4$ 得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

$\therefore a^2=4,b^2=4\Rightarrow a=2,b=2$

所以渐近线方程为 $y=\pm x$

故答案为 $y=\pm x$.

【点睛】本题考查了双曲线渐近线方程的求法，属于基础题.

13.【答案】$\frac{10}{3}$

【分析】利用向量数量积的几何意义，求出点 P 到平面的距离即可.

【详解】平面 α 经过原点 O，且法向量为 $\vec{n}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$，

则点 P 到平面 α 的距离为 $\frac{\left|\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{10}{3}$.

故答案为：$\frac{10}{3}$.

14.【答案】 ①. $\frac{3}{4}$ ##0.75 ②. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ##$\frac{1}{2}\sqrt{6}$

【分析】第一空：利用空间向量的线性运算法则，结合三角形重心的性质求解；

第二空：将 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ 两边同时平方，利用数量积的运算律计算即可.

【详解】$\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG_1}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_1})=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\right]$

$=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$,

$\therefore x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{4}$

则 $x+y+z=\frac{3}{4}$

将 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ 两边同时平方得：

$\overrightarrow{OG}^2=\frac{1}{16}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}\right)$

$=\frac{1}{16}\left(4\times3+3\times2\times2\times2\times\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{4}$

$\therefore |OG| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

故答案为：$\dfrac{3}{4}$；$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

15.【答案】①②③④

【分析】画出曲线C的图象，根据对称性、面积、图象等知识确定正确答案.

【详解】曲线$C: x^2+y^2=|x|+|y|$，

则$x\ge 0, y\ge 0$时，$x^2+y^2=x+y, \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

$x<0, y\ge 0$时，$x^2+y^2=-x+y, \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

$x\ge 0, y<0$时，$x^2+y^2=x-y, \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

当$x<0, y<0$时，$x^2+y^2=-x-y, \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

由此画出曲线C的图象如下图所示，

由图可知：

曲线C关于原点对称，也关于x轴、y轴对称，①正确.

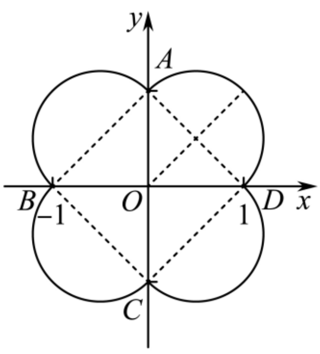
曲线C围成的面积是$4\times\left(\dfrac{1}{2}\times\pi\times\dfrac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\pi+2$，②正确.

曲线C上任意一点到原点的距离者不大于$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，③正确

曲线C上的点到原点的距离的最小值为 1，即$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=1$，

所以④正确.

故答案为：①②③④



三、解答题（本题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

16.【答案】（1）$(x-2)^2+y^2=4$

（2）$x=1$ 和 $3x+4y-11=0$

【分析】（1）设圆心 $(a,0)$，则圆心到 $(0,0)$ 与 $(2,2)$ 距离相同且等于半径，由此求出 $a=2$，进而求出圆 C 的方程.

（2）分别研究斜率存在与斜率不存在时两种情况：当斜率不存在时，直线为 $x=1$，符合要求；当斜率存在时，设直线 l 为 $kx-y+2-k=0$，则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2k+2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，再结合弦长公式即可求出 k 的值，由此能出直线 l 的方程.

【小问 1 详解】

设圆心 $(a,0)$，则圆心到 $(0,0)$ 与 $(2,2)$ 距离相同且等于半径，

所以 $r^2=a^2=(2-a)^2+2^2$，解得 $a=2$，

所以圆心为 $(2,0)$，半径 $r=2$，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

【小问 2 详解】

当斜率存在时，设直线 l 为 $y-2=k(x-1)$，整理得 $kx-y+2-k=0$，

则圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2k+2-k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$，①

又因为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-d^2}=2\sqrt{3}$，解得 $d=1$，②

由①②解得：$k=-\dfrac{3}{4}$，

所以直线方程为 $-\dfrac{3}{4}x-y+2+\dfrac{3}{4}=0$，整理得 $3x+4y-11=0$；

当斜率不存在时，直线为 $x=1$，此时圆心到直线的距离 $d=1$，

所以其弦长为 $2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$，符合题意.

综上，所求直线方程为 $x=1$ 和 $3x+4y-11=0$.

17.【答案】（1）90°

（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【分析】（1）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，利用空间向量的数量积求解直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值即可.

（2）求出平面 A_1EC 的法向量，利用平面法向量与直线方向向量的夹角即可求解线面角

【小问 1 详解】

以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $A_1(2,0,2),C(0,3,0),B(2,3,0),C_1(0,3,2),E(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-2,3,-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$. 所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1C}|\left|\overrightarrow{BC_1}\right|}=\dfrac{4-4}{\sqrt{8}\times\sqrt{17}}=0$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BC_1}$，故直线 A_1C 与 BC_1 所成角为 90° .

【小问 2 详解】

因为 $\overrightarrow{EC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2)$，

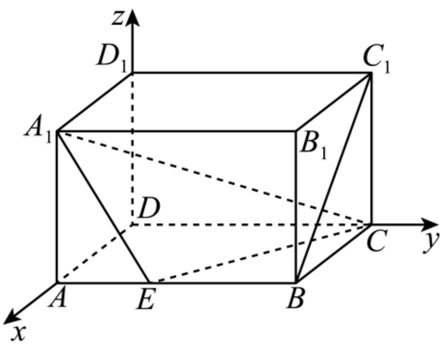
设平面 A_1EC 的法向量为 $\vec{m}=(x，y，z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-2z=0,\\ -2x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=2$，$z=1$,于是 $\vec{m}=(2,2,1)$，

设 BC_1 与平面 A_1EC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\vec{m}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{|-4+0+2|}{2\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

所以 BC_1 与平面 A_1EC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$



18.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 求出 a,b 后可得椭圆的方程；

(2) 设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，用斜率 k 表示 $|AB|,|DF|$ 后可证 $\dfrac{|AB|}{|DF|}$ 为定值.

【小问 1 详解】

由题设可得 $a=2$，

设椭圆的半焦距为 c，则 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，故 $c=1$，故 $b=\sqrt{3}$，

故椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

当 $k=0$ 时，$l:y=0$，此时 $|\mathrm{AB}|=4$，而 $D(0,0)$，故 $|DF|=1$，故 $\frac{|AB|}{|DF|}=4$.

当 $k\neq 0$ 时，直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 可得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

此时 $\Delta=64k^4-4(3+4k^2)(4k^2-12)=144+144k^2>0$，

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{3k}{3+4k^2}$，

且 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{\sqrt{144+144k^2}}{3+4k^2}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$.

AB 的中垂线的方程为：$y=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2}{3+4k^2}\right)-\frac{3k}{3+4k^2}$，

令 $y=0$，则 $x_D=\frac{k^2}{3+4k^2}$，故 $|DF|=\left|\frac{k^2}{3+4k^2}-1\right|=\frac{3(1+k^2)}{3+4k^2}$，

故 $\frac{|AB|}{|DF|}=4$.

19.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{17}}{17}$

（3）存在点 G，使得 $DG//$ 平面 AEF，此时 $\frac{PG}{PC}=\frac{4}{5}$，利用见解析

【分析】（1）证明 $CD\perp AD$，$CD\perp AE$，得出 $PD\perp AE$，再证明 $AE\perp$ 平面 PCD.

（2）建立空间直角坐标系，求出平面 AEF 的法向量，平面 PAD 的一个法向量，然后利用空间向量的数量积求解.

（3）假设棱 PC 上存在点 G，使得 $DG//$ 平面 AEF，利用 $\overline{DG}\cdot\vec{n}=0$，转化求解线段 PC 上存在点 G，使得 $DG//$ 平面 AEF.

【小问 1 详解】

证明：因为 $CD\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，$AE\subset$ 平面 PAD，

所以 $CD\perp AD$，$CD\perp AE$.

又因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，E 为 PD 的中点，

所以 $PD \perp AE$． $PD \cap CD = D, PD, CD \subset$ 平面 PCD

所以 $AE \perp$ 平面 PCD；

【小问 2 详解】

取 AD 的中点 O，连接 OP， OB，

由于 $DO//BC, DO = BC$，所以四边形 $DOBC$ 为平行四边形，

又 $CD \perp AD$，所以四边形 $DOBC$ 为矩形，

故 $OB//CD$， $OB \perp AD$， $OB \perp OP$．

因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，所以 $OP \perp AD$，

以 O 为原点，以 OA, OB, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴如图建系，

$A(1,0,0)$，$E(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$F(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(0,2,0)$，

$\overrightarrow{AE} = (-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{EF} = (\frac{1}{2},1,0)$，

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，则：$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x + y = 0 \end{cases}$，

令 $x = 2$，得平面 AEF 的一个法向量 $\vec{n} = (2, -1, 2\sqrt{3})$，

易知平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB} = (0,2,0)$，

$$\cos < \overrightarrow{OB}, \vec{n} > = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{OB}||\vec{n}|} = \frac{-2}{2\sqrt{4+1+12}} = -\frac{\sqrt{17}}{17},$$

所以平面 AEF 与平面 PAD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$；

【小问 3 详解】

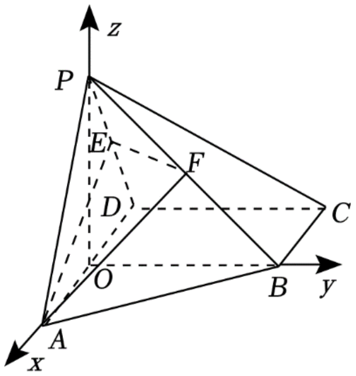
解：假设棱 PC 上存在点 G，使得 $DG//$ 平面 AEF，

设 $\frac{PG}{PC} = \lambda, \lambda \in [0,1]$，则 $\overrightarrow{PG} = \lambda \overrightarrow{PC}$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,2,0)$，$D(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{PC} = (-1,2,-\sqrt{3})$，则 $G(-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$， $\overrightarrow{DG} = (1-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$，

要使得 $DG//$ 平面 AEF，则 $\overrightarrow{DG} \cdot \vec{n} = 2 - 2\lambda - 2\lambda + 6 - 6\lambda = 0$，得 $\lambda = \frac{4}{5}$，

所以线段 PC 上存在点 G，使得 $DG//$ 平面 AEF， $\frac{PG}{PC} = \frac{4}{5}$．



20.【答案】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$

(2) 证明见解析，定点 $(\frac{4\sqrt{3}}{5},0)$

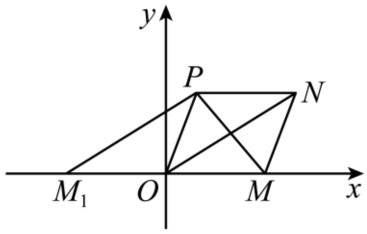
(3) $\frac{32}{25}$.

【分析】(1)根据几何位置关系可得 $PM+PM_1=4$，再根据椭圆定义求解；

(2)利用韦达定理表示出 E,F 坐标，从而表示出 EF 的直线方程即可求解；

(3)利用韦达定理表示出弦长 AB,CD，进而可表示面积，利用二次函数的性质可求面积的最小值.

【小问 1 详解】



取点 $M_1(-\sqrt{3},0)$，则有 $M_1O\underline{\mathbin{/\!/}}PN$，所以四边形 M_1ONP 是平行四边形，

所以 $PM_1=ON$，因为 $PM+ON=4$，所以 $PM+PM_1=4$，

所以动点 P 的轨迹为椭圆（左右顶点除外），所以 $2a=4$，$c=\sqrt{3}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=1$，所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$.

【小问 2 详解】

当 l_1 垂直于 x 轴时，AB 的中点 $E(\sqrt{3},0)$，

直线 l_2 为 x 轴，与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(y\neq 0)$，无交点，不合题意，

当直线 l_1 不垂直于 x 轴时，不妨设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})(k\neq 0)$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} y=k(x-\sqrt{3}) \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$，得$(1+4k^2)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，

所以$\triangle=(-8\sqrt{3}k^2)^2-4(4k^2+1)(12k^2-4)=16(1+k^2)>0$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{12k^2-4}{4k^2+1}$，

所以$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2\sqrt{3}k=\dfrac{8\sqrt{3}k^3}{1+4k^2}-2\sqrt{3}k=\dfrac{-2\sqrt{3}k}{1+4k^2}$，

所以$E(\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1},\dfrac{-\sqrt{3}k}{4k^2+1})$，

因为$l_1\perp l_2$，以$-\dfrac{1}{k}$代替k，得$F(\dfrac{4\sqrt{3}}{k^2+4},\dfrac{\sqrt{3}k}{k^2+4})$，

所以直线EF的斜率为$k_{EF}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}k}{k^2+4}+\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}}{\dfrac{4\sqrt{3}}{k^2+4}-\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}}=\dfrac{5k}{4(1-k^2)}(k\neq\pm1)$，

所以直线EF的方程为$y+\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}=\dfrac{5k}{4(1-k^2)}(x-\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1})(k\neq\pm1)$，

由椭圆的对称性得，若存在这样的定点必在x轴上，

令$y=0$，则$\dfrac{\sqrt{3}k}{4k^2+1}=\dfrac{5k}{4(1-k^2)}(x-\dfrac{4\sqrt{3}k^2}{4k^2+1})$，

所以$x=\dfrac{16\sqrt{3}k^2+4\sqrt{3}}{5(4k^2+1)}=\dfrac{4\sqrt{3}(4k^2+1)}{5(1+4k^2)}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$，

所以直线EF恒过定点$(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},0)$，

当$k=\pm1$时，$E(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},-\dfrac{\sqrt{3}}{5})$，$F(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},\dfrac{\sqrt{3}}{5})$，

所以直线EF恒过定点$(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},0)$，

综上所述，直线EF恒过定点$(\dfrac{4\sqrt{3}}{5},0)$．

【小问3详解】

由（2）得$x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{12k^2-4}{4k^2+1}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{192k^4}{(4k^2+1)^2}-4\cdot\dfrac{12k^2-4}{4k^2+1}}=\dfrac{4(1+k^2)}{4k^2+1}$,

同理可得 $|CD|=\dfrac{4(1+k^2)}{k^2+4}$,

所以四边形 $ACBD$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB||CD|=\dfrac{8(1+k^2)^2}{(4k^2+1)(k^2+4)}$,

令 $t=k^2+1$，则 $t>1$，

所以 $S=\dfrac{8t^2}{(4t-3)(t+3)}=\dfrac{8t^2}{4t^2+9t-9}=\dfrac{8}{-\dfrac{9}{t^2}+\dfrac{9}{t}+4}=\dfrac{8}{-(\dfrac{3}{t})^2+3\cdot\dfrac{3}{t}+4}$,

因为 $t>1$，所以 $0<\dfrac{3}{t}<3$，

当 $\dfrac{3}{t}=\dfrac{3}{2}$，即 $k=\pm 1$ 时，$-(\dfrac{3}{t})^2+3\cdot\dfrac{3}{t}+4\le\dfrac{25}{4}$，所以 $S_{\min}=\dfrac{32}{25}$,

所以四边形 $ACBD$ 的面积最小值为 $\dfrac{32}{25}$.